2029
D. S.

8° Don. Lud. 556 (1

Vollständige Anleitung

zur

niedern, höhern und angewandten

Mathematik,

in so fern solche

sowohl dem Officier überhaupt,

als auch

dem Ingenieur, Artilleristen und Seemann

unentbehrlich ist.

Von

Johann Philipp Grüson,

Königl. Professor der Mathematik bey dem adelichen Cadettencorps in Berlin, und ordentlichem Mitgliede der Königl. Preuß. Akademie der Wissenschaften.

Erster Theil,

welcher

die Arithmetik

enthält.

Berlin,

bey F. T. Lagarde.

1799.

Bayerische
Staatsbibliothek
München

Sr. Hochwohlgebohren

dem

Herrn Friedrich Wilhelm v. Rüchel,

Königl. Preuß. General-Major der Infanterie, Chef des Regiments Garde zu Fuß, General-Inspecteur der Academie-Militaire, des Cadetten-Corps zu Berlin und sämmtlicher adlichen Erziehungs-Institute; Inspecteur der Potsdamschen Inspection, Ritter des großen rothen Adler-Orden, der Orden vom Verdienste und des hessischen Orden pour la vertû militaire. Erb-Lehn- und Gerichtsherrn mehrerer Güter. ꝛc. ꝛc. ꝛc.

ehrfurchtsvoll und aus innigster Dankbarkeit gewidmet

von

dem Verfasser.

D. C. III. Bibliothek

Vorrede.

Bey gegenwärtigem Werke liegt zwar der Cours de Mathématiques à l'usage du Corps Royal de l'artillerie par BÉZOUT. zum Grunde, es ist aber ersteres keinesweges eine Uebersetzung des letztern, wovon man sich leicht überführen wird. Die hierin enthaltenen militairischen Beyspiele, habe ich aus den besten, mir bekannten Schriften dieser Art gezogen. Dem gegenwärtigen ersten Theile, der die Arithmetik enthält, werden schnell die andern folgen, die in Hinsicht der Seitenzahl, eben so, wie der gegenwärtige erste Theil, das zum Grunde gelegte Werk, ansehnlich über-

übertreffen werden. Sie enthalten die Geometrie, die ebene und sphärische Trigonometrie, die niedere und höhere Analysis, die Anwendung der Algebra auf die Geometrie, und hier vorzüglich die Lehre von den Kegelschnitten und anderer Curven. Nun folgen die physisch-mechanischen Wissenschaften. Ob das deutsche dem zum Grunde gelegten französischen Werke vorzuziehen sey, überlasse ich dem Urtheile der Sachkundigen, deren gütige Belehrung mir stets willkommen seyn wird.

Berlin d. 16. April. 1799.

J. P. Grüson.

Innhaltsanzeige.

Vorläufige Begriffe über die Natur und die verschiedenen Arten der Zahlen. . . . . S. 1
Vom Nummeriren der ganzen und zehntheiligen Zahlen 3
Von den Rechnungsarten 14
Von der Addition der ganzen und zehntheiligen Zahlen 15
Von der Subtraction der ganzen und zehntheiligen Zahlen 18
Von der Probe der Addition und Subtraction . . 22
Von der Multiplication 25
Von der Multiplication mit einer einer einziffrigen Zahl 30
Von der Multiplication mit einer vielzifferigen Zahl . 31
Von der Multiplication mit Decimalbrüchen . . 35
Abgekürzte Multiplication (Multiplicatio contracta) . 36
Einige Anwendungen der Multiplication . . . 38
Von der Division der ganzen und zehntheiligen Zahlen 41
Von der Division einer aus mehrern Ziffern bestehenden Zahl, durch eine Zahl, die aus einer Ziffer bestehet 42
Von der Division mit einer aus mehrern Ziffern bestehenden Zahl 46
Mittel, die vorhergehende Methode abzukürzen . . 50
Von der Division mit Decimalbrüchen 52
Abgekürzte Division (Divisio contracta) . . . 55
Von der Probe der Multiplication und Division . . 60
Neuner Probe 62
Einige Anwendungen des Vorhergehendem . . . 65
Von den Brüchen 69
Von den ganzen Zahlen, in sofern sie unter der Gestalt eines Bruchs vorgestellt werden 71
Von den Veränderungen, die mit den Gliedern eines Bruchs ohne Nachtheil desselben vorgenommen werden können 72
Brüche auf gleiche Benennungen zu bringen. . . 74
Brüche auf die kleinste Benennung zu bringen . . 78
Verschiedene Arten einen Bruch zu betrachten, nebst den aus diesen Betrachtungen zu ziehenden Folgen . 83
Von der Addition der Brüche 84
Von der Subtraction der Brüche 85
Von der Multiplication der Brüche 86
Von der Division der Brüche 88
Einige Anwendungen des Vorhergehenden . . . 89
Von den gebrochenen Brüchen. 92
Von den continuirlichen Brüchen 95
Beispiele in Brüchen zur Uebung 101
Von complexen Zahlen 106
Von der Addition complexer Zahlen 107
Von der Subtraction complexer Zahlen 109
Von der Multiplication complexer Zahlen . . . 111
Eine complexe Zahl durch eine incomplexe Zahl zu dividiren 121

S.

Eine complexe Zahl durch eine complexe Zahl zu dividiren 124
Von der Entstehung der Quadratzahlen und der Ausziehung ihrer Wurzel 127
Von der Entstehung der Cubiczahlen und der Ausziehung ihrer Wurzel 144
Beyspiele für Quadrat- nnd Cubiczahlen; und Ausziehung ihrer Wurzel 157
Von den Verhältnissen, Proportionen, Progressionen und einigen davon abhängenden Regeln 159
Von den Eigenschaften der arithmetischen Proportion . 166
Von den Eigenschaften der geometrischen Proportion . 167
Anwendung des Vorhergehenden 178
Von der geraden einfachen Regel de tri 178
Von der umgekehrten einfachen Regel de tri . . . 181
Von der zusammengesetzten Regel de tri 185
Von der Gesellschaftsregel 187
Noch einige Sätze von geometrischen Verhältnissen und Proportionen 194
Beyspiele zur einfachen geraden Regel de tri . . . 195
Beyspiele zur einfachen verkehrten Regel de tri . . 197
Beyspiele zur geraden zusammengesetzten Regel de tri . 199
Beyspiele zur Gesellschaftsrechnung 204
Von einigen andern, von den Proportionen abhangenden Regeln 216
Einfache Regel Falsi 216
Doppelte Regel Falsi 221
Vermischungsregel 227
Alligationsregel 234
Regel Coeci 248
Von der arithmetischen Progression 261
Von den vieleckigten oder Polygonalzahlen, und deren Anwendung zur Berechnung der Kugelhaufen . . . 275
Regel zur Berechnung der dreyeckigten Kugelhaufen . 284
Regel zur Berechnung der viereckigten Kugelhaufen . 285
Regel zur Berechnung der länglichten Kugelhaufen . 287
Regel zur Berechnung eines unvollständigen Kugelhaufen . 289
Von den geometrischen Progressionen 290
Von den Logarithmen 313
Eigenschaften der Logarithmen 317
Gebrauch der Logarithmen 321
Von den Zahlen, deren Logarithmen sich nicht in den Tafeln finden 325
Von den Logarithmen, deren Zahlen sich nicht in den Tafeln finden 332
Von dem arithmetischen Complement, und von seinem Gebrauche 338
Vergleichung der vornehmsten Münzen, Maaße und Gewichte in Europa 346
Tafel der Quadrat- und Kubiczahlen von 1 bis 1000 . 401
Tafel der gemeinen Logarithmen von 1 bis 1000 . . 411

Anfangsgründe
der
Arithmetik.

Vorläufige Begriffe über die Natur und die verschiedenen Arten der Zahlen.

1.

Eine Größe nennt man allgemein das, was einer Vermehrung und Verminderung fähig ist. Die Ausdehnung, die Dauer, das Gewicht, die Geschwindigkeit u. s. w. sind also Größen. Jede Größe ist ein Gegenstand der mathematischen Wissenschaften, folglich auch der Arithmetik, die einen Theil derselben ausmacht, und welche die Größen in sofern betrachtet, als sie durch Zahlen vorgestellt werden.

2.

Die Arithmetik ist demnach eine Wissenschaft, welche die Natur und Eigenschaften der Zahlen betrachtet, und zum Zweck hat, leichte Mittel anzuge-

ben, nicht allein die Zahlen vorzustellen, sondern sie auch zusammen zu setzen, und wieder in ihre Theile zu zerlegen. Dies nennt man rechnen.

3.

Um einen richtigen Begriff von den Zahlen zu erhalten, muß man zuvor wissen, was man unter dem Worte Einheit versteht.

4.

Die Einheit, der Einer oder Eins, ist eine oft willkührlich angenommene Größe, welche zur Vergleichung anderer Größen dient, die mit ihr von einerlei Art sind.

Wenn man also sagt: ein Körper wiegt 5 Pfund; so ist das Pfund die Einheit oder die Größe, mit welcher man das Gewicht dieses Körpers vergleichet Eben so hätte man die Unze zur Einheit annehmen können, alsdann aber würde das Gewicht dieses Körpers durch 80 angezeigt werden.

5.

Die Zahl zeigt an, aus wie viel Einheiten oder Theilen der Einheit, eine Größe zusammengesetzt ist.

Ist eine Größe von ganzen Einheiten zusammengesetzt, so ist die Zahl, durch welche sie angezeigt wird, eine ganze Zahl; ist sie aber von ganzen Einheiten und Theilen der Einheit zusammengesetzt, so ist die Zahl eine gemischte Zahl oder ein uneigentlicher Bruch; und bestehet sie nur aus Theilen der Einheit, so ist sie ein eigentlicher Bruch. Also ist drey und

ein halb ein uneigentlicher dreyviertel aber, ein eigentlicher Bruch.

6.

Eine Zahl, die ohne Bezeichnung einer Art von Einheit ausgesprochen wird, wie man z. B. schlechtweg sagt: Drey oder dreymal, viermal, wird eine unbenannte Zahl genannt. Spricht man aber zugleich eine Art von Einheit bey derselben aus, so daß man sagt: vier Kanonen, hundert Kugeln, so heißt sie eine benannte Zahl.

Die übrigen Arten von Zahlen werden wir gehörigen Orts erklären.

Vom Nummeriren der ganzen und zehntheiligen Zahlen.

7.

Unter Nummeriren verstehen wir die Kunst, alle Zahlen durch gewisse Namen und Zeichen auszudrücken, welche letztere Ziffern genannt werden.

Wir unterlassen hier die Namen der Zahlen zu geben, weil sie jedermann bekannt sind. Was aber die Art, die Zahlen durch Ziffern darzustellen, betrift, so verpflichten uns verschiedene Gründe, die Principien davon vorzutragen.

8.

Die Zeichen und Namen, deren man sich beym Nummeriren bedient, sind folgende:

0. 1. 2. 3. 4. 5. 6. 7. 8. 9.
Null. Eins. Zwey. Drey. Vier. Fünf. Sechs. Sieben. Acht. Neun.

Um alle andere Zahlen mit diesen Zeichen auszudrücken, ist man übereingekommen, daß zehn Einer eine andere Einheit bestimmen, der man den Namen Zehner gab. Diese zählte man aber so wie die ersten zusammen, zwey Zehner, drey Zehner u. s. f. bis zu neun Zehnern, und stellte sie mit eben denselben Ziffern vor; jedoch mit dem Unterschiede, daß man sie dem Einer zur Linken setzte, um sie durch diese Stellen von den letztern unterscheiden zu können.

Um also vier und funfzig vorzustellen, welche vier Einer und fünf Zehner enthalten, ist man übereingekommen, 54 zu schreiben. Um sechzig vorzustellen, welche Zahl blos Zehner und keinen Einer enthält, schreibt man 60. Man setzt demnach eine Null der 6 zur Rechten, welche anzeigt, daß in dieser Zahl keine Einer sind, sondern die 6 eine Anzahl Zehner geben. Man kann also durch dieses Mittel von eins bis neun und neunzig inklusive, zählen.

9.

Beyläufig können wir nun folgende Eigenschaften von dem jetzigen Nummeriren bemerken, daß eine Ziffer, die einer andern zur Linken gesetzt ist, oder nach welcher eine Null folgt, allemal eine Zahl vorstellt, die zehnmal größer ist, als wenn sie allein stände.

10.

Von 99 an kann man, einer ähnlichen Uebereinkunft wegen, bis zu neunhundert und neun und neunzig zählen: denn, von zehn Zehnern wird eine neue Einheit bestimmt, welche man Hundert nennt. Diese zählet man sodann von eins bis neune, stellt sie durch dieselben Ziffern vor, und setzt sie den Zehnern zur Linken.

Um also achthundert neun und funfzig anzuzeigen, welche acht hunderte, fünf Zehner und neun Einer enthalten, schreibt man 859. Soll man achthundert und neun schreiben, welche acht Hunderte, keine Zehner und neun Einer enthalten, so setzt man 809, in welcher Zahl die Null die Stelle der fehlenden Zehner einnimmt, wodurch allein die Hunderte ihren Werth erhalten können. Und sollten auch die Einer fehlen, so würde man zwey Nullen setzen. Um also achthundert anzuzeigen, würde man 800 schreiben.

11.

Wir bemerken nunmehr, daß vermittelst dieser Uebereinkunft eine Ziffer, der zwey andere, oder zwey Nullen folgen, hundertmal größer sey, als wenn sie allein stände.

12.

Von Neunhundert neun und neunzig an, kann man durch denselben Kunstgriff bis neun tausend neun hundert neun und neunzig zählen, indem man aus zehn Hunderten wieder eine Einheit bestimmt, die man Tausend nennt. Diese Einheiten werden, wie die vorigen gezählet, mit eben denselben Ziffern ausgedruckt, und den Hunderten zur Linken gesetzt.

Um also sieben tausend acht hundert neun und funfzig vorzustellen, würde man 7859 schreiben; und sieben tausend und neun durch 7009, sieben tausend aber durch 7000 anzeigen. Woraus erhellet, daß eine Ziffer, welcher drey andere oder drey Nullen folgen, tausendmal größer sey, als wenn sie allein stände.

13.

Indem man also fortfährt, aus zehn Einheiten einer, Art eine neue zu bestimmen, und indem man diese neuen Einheiten nach und nach in die Stellen linkerhand fortrückt; so gelangt man dahin, alle ersinnliche ganze Zahlen auf eine einförmige Art durch obige zehn Ziffern vorzustellen.

14.

Um jede gegebene Zahl auf eine leichte Art aussprechen zu können (sie mag auch durch so viel Ziffern vorgestellt seyn, als man will), so theile man sie in Gedanken in Abschnitte (tranche) zu drey Ziffern und gebe denselben von der rechten Hand anfangend die Namen, Einheiten, Tausende, Millionen, Tausend Millionen*), Billionen, Tausend Billionen, Trillionen, Tausend Trillionen, Quadrillionen u. s. w. Auf diese Weise enthält, bey einem jeden benannten Abschnitt, (indem man von der rechten ausgehet) die erste Stelle Einer, die zweyte Zehner und die dritte Hunderte. Will man dergleichen Zahl aussprechen, so fängt man zur Linken an, und drückt die Einer, Zehner, und

*) Bezout nummerirt wie fast alle Franzosen, und setzt statt 1000 Millionen, Billion, statt Billion, Trillion u. s. w.

Hunderte eines jeden Abschnitts so aus, als wenn er allein da stände.

Z. B. um folgende Zahl auszusprechen:

Tausend Billionen Tausend Millionen Tausend Einheiten.

23 456 789 234 565 456

würde man sagen: drey und zwanzig tausend vier hundert sechs und funfzig Billionen, sieben hundert neun und achtzig tausend zwey hundert vier und dreißig Millionen, fünfhundert fünf und sechzig tausend vier hundert sechs und funfzig Einheiten.

15.

Aus dem, gegenwärtig ganz aus einander gesetzten Nummeriren (welches lediglich Uebereinkunft ist), erhellet nun, daß, wenn man bey einer Zahl von der Rechten zur Linken hinaufgehet, die auf einander folgenden Einheiten, immer zehnmal größer werden, und daß folglich, um eine Zahl zehn, hundert, u. s. w. mal, größer zu machen, man nur der Ziffer, welche die Einer bezeichnet, eine, zwey u. s. w. Nullen anhängen dürfe. Im Gegentheil aber werden diese auf einander folgenden Einheiten immer zehnmal kleiner, je nachdem man von der Linken zur Rechten herunter rückt.

16.

So ist das eigentliche Nummeriren, welches den Grund aller andern Rechnungsarten ausmacht, beschaffen*); ob man sich gleich in verschiedenen Künsten nicht begnügt, damit nur allein nach Zehnern und Hunderten zu rechnen.

*) Die Arithmetik bestehet eigentlich aus zwey Theilen: der eine Theil gründet sich auf das Decimalsystem und auf die Art, die Ziffern zu setzen, um durch sie verschiedene Zahlen aus

Vom Nummeriren.

17.

Um kleinere Größen, als die angenommene Einheit, zu bestimmen, theilet man dieselbe in andere kleinere Einheiten, deren Menge an sich selbst gleichgültig ist, so bald sie nur die zu betrachtende Größe ausmessen können. Man muß aber vornehmlich bey diesen Eintheilungen den Zweck vor Augen haben, daß sie uns die bequemste Art zu rechnen verschaffen; daher theilet man die Einheiten anfangs nicht sogleich in eine große Menge Theile, sondern, um die kleinen Theile bestimmen zu können, vorher in eine gewisse Anzahl Theile, und diese nachher in eine Anzahl kleinere, und diese eben so in noch kleinere.

So theilet man z. B., bey den Münzen den Thaler in 24 Theile. welche man Groschen nennet, und die Groschen in 12 Theile, die man Pfennige nennet. Auf ähnliche Art das Gewicht, wo das Pfund 2 Mark, die Mark 8 Unzen, und die Unze 8 Quentchen u. s. w. giebt. Im ersten Fall rechnet man also zuerst mit vier und zwanzig Theilen, und dann mit deren zwölf Theilen,

drücken zu können; dieser Theil enhält die vier gewöhnlichen Rechnungsarten, die Addition, die Subtraction, die Multiplication und die Division. Diese Operationen würden verschieden seyn, wenn man ein anderes System angenommen hätte. Der andere Theil ist von dem Systeme der Nummeration unabhängig; er gründet sich auf die Betrachtungen der Größen nnd auf die allgemeinen Eigenschaften der Zahlen. Zu diesem Theile gehört die Theorie der Brüche, die der Potenzen und Wurzeln, die Theorie der Proportionen, die der arithmetischen und geometrischen Progressionen, und endlich die Theorie der Logarithmen.

und im zweyten Fall zuerst mit halben, und dann mit deren Achteln u. s. w.

18.

Eine Zahl, welche aus Theilen zusammengesetzt ist, die eine Beziehung auf einander haben, und die aus verschiedenen Einheiten bestehet, nennet man eine komplexe Zahl und im Gegentheil diejenige, welche nur eine Art von Einheit enthält, eine inkomplexe Zahl. So ist 8 Thaler eine inkomplexe Zahl, und 8 Thlr. 17 Gr. 8 Pf. eine komplexe Zahl.

19.

In jeder Kunst hat man aber die darin angenommene Einheit nach Bequemlichkeit eingetheilet; daher ist die Eintheilung der Ruthen von der für die Thaler, diese wieder von der für die Tage, für die Stunden, und diese wieder von der für die Mark u. s. w. sehr verschieden, wie wir dieselben an dem Orte werden kennen lernen, wo wir von den komplexen Zahlen handeln werden.

20.

Indessen ist wohl von allen Eintheilungen der Einheit, diejenige unstreitig die beste, welche unter dem Nahmen der zehntheiligen bekannt ist. Man theilet nemlich die Einheit in zehn Theile; einen jeden dieser Theile wiederum in zehn Theile u. s. w. Jedes folgende Theilchen wird also zehnmal kleiner, als ein vorhergehendes. Diese Eintheilung ist daher auch bey den mathematischen Wissenschaften im Ge-

17.

Um kleinere Größen, als die angenommene Einheit, zu bestimmen, theilet man dieselbe in andere kleinere Einheiten, deren Menge an sich selbst gleichgültig ist, so bald sie nur die zu betrachtende Größe ausmessen können. Man muß aber vornehmlich bey diesen Eintheilungen den Zweck vor Augen haben, daß sie uns die bequemste Art zu rechnen verschaffen; daher theilet man die Einheiten anfangs nicht sogleich in eine große Menge Theile, sondern, um die kleinen Theile bestimmen zu können, vorher in eine gewisse Anzahl Theile, und diese nachher in eine Anzahl kleinere, und diese eben so in noch kleinere.

So theilet man z. B., bey den Münzen den Thaler in 24 Theile. welche man Groschen nennet, und die Groschen in 12 Theile, die man Pfennige nennet. Auf ähnliche Art das Gewicht, wo das Pfund 2 Mark, die Mark 8 Unzen, und die Unze 8 Quentchen u. s. w. giebt. Im ersten Fall rechnet man also zuerst mit vier und zwanzig Theilen, und dann mit deren zwölf Theilen,

drücken zu können; dieser Theil enhält die vier gewöhnlichen Rechnungsarten, die Addition, die Subtraction, die Multiplication und die Division. Diese Operationen würden verschieden seyn, wenn man ein anderes System angenommen hätte. Der andere Theil ist von dem Systeme der Numneration unabhängig; er gründet sich auf die Betrachtungen der Größen und auf die allgemeinen Eigenschaften der Zahlen. Zu diesem Theile gehört die Theorie der Brüche, die der Potenzen und Wurzeln, die Theorie der Proportionen, die der arithmetischen und geometrischen Progressionen, und endlich die Theorie der Logarithmen.

und im zweyten Fall zuerst mit halben, und dann mit deren Achteln u. s. w.

18.

Eine Zahl, welche aus Theilen zusammengesetzt ist, die eine Beziehung auf einander haben, und die aus verschiedenen Einheiten bestehet, nennet man eine komplexe Zahl und im Gegentheil diejenige, welche nur eine Art von Einheit enthält, eine inkomplexe Zahl. So ist 8 Thaler eine inkomplexe Zahl, und 8 Thlr. 17 Gr. 8 Pf. eine komplexe Zahl.

19.

In jeder Kunst hat man aber die darin angenommene Einheit nach Bequemlichkeit eingetheilet; daher ist die Eintheilung der Ruthen von der für die Thaler, diese wieder von der für die Tage, für die Stunden, und diese wieder von der für die Mark u. s. w. sehr verschieden, wie wir dieselben an dem Orte werden kennen lernen, wo wir von den komplexen Zahlen handeln werden.

20.

Indessen ist wohl von allen Eintheilungen der Einheit, diejenige unstreitig die beste, welche unter dem Nahmen der zehntheiligen bekannt ist. Man theilet nemlich die Einheit in zehn Theile; einen jeden dieser Theile wiederum in zehn Theile u. s. w. Jedes folgende Theilchen wird also zehnmal kleiner, als ein vorhergehendes. Diese Eintheilung ist daher auch bey den mathematischen Wissenschaften im Ge-

brauch. Ueberdies ist die Bildung und die Rechnung mit zehntheiligen Zahlen genau dieselbe, wie bey den ganzen Zahlen; welches wir nun sogleich sehen werden.

21.

Um die kleinern Theile des Einers durch zehntheilige Zahlen zu bestimmen, stelle man sich vor, daß eine Einheit, wie z. B. Thaler, Pfund, Ruthe u. s. w. eben so aus zehn Theilen zusammengesetzt ist, als man sich den Zehner aus zehn Einern zusammengesetzt einbildet. Diese neuen Einheiten werden nun, da sie zehnmal kleiner, als die Einer sind, Zehntheile genannt, und man stellet sie rechts neben die Ziffer, welche die Einer bezeichnet.

Um aber aller Zweydeutigkeit zuvor zu kommen, und nicht Gelegenheit zu geben, Einer statt Zehner zu nehmen; so ist man ein für allemal darin übereingekommen, die Stelle der Einer durch ein besonderes Zeichen, nemlich durch ein Komma, festzusetzen, welches rechts der Stelle der Einer, oder zwischen den Einern und Zehntheilen zu stehen kommt.

Um also vier und zwanzig Einheiten und drey Zehntheile vorzustellen, würde man schreiben 24, 3.

22.

Eben so kann man die Zehntheile als wirkliche Einheiten betrachten, welche durch zehn andere Einheiten hervorgebracht worden sind, von denen eine jede zehnmal kleiner als ein Zehntheil ist; und deshalb kann man sie auch wieder rechts neben die

Zehntheile stellen. Diese andern Einheiten, die zehnmahl kleiner als die Zehntheile sind, müssen offenbar hundertmal kleiner, als die Einer seyn, und werden aus dieser Ursache Hunderttheile genannt.

Also, um 24 Einheiten, 3 Zehntheile und 5 Hunderttheile vorzustellen, schreibt man 24, 35.

23.

Denken wir uns ein Hunderttheil in zehn Theile getheilt, so müssen die Theile tausendmal kleiner als der Einer seyn, und deswegen Tausendtheile genannt werden; auch müssen sie, da sie zehnmal kleiner als die Hunderttheile sind, diesen zur Rechten stehen. Fährt man endlich mit dieser Eintheilung von Zehntheilen zu Zehntheilen fort, so entstehen neue Einheiten, die nach und nach Zehntausendtheile, Hunderttausendtheile, Millionentheile, Zehnmillionentheile u. s. w. genannt werden.

24.

Die Theile der Einheit, welche wir so eben beschrieben haben, sind diejenigen, welche man zehntheilige Zahlen, oder Decimalbrüche nennt.

25.

Was die Art, sie auszusprechen, anbelangt, so ist sie eben dieselbe, als die für ganze Zahlen. Nachdem man die Ziffern ausgesprochen hat, welche zur linken des Kommas stehen, so spricht man die zehntheilige Zahl auf obige Art aus, und setzt endlich den

Namen der Decimaleinheiten der niedrigsten Art hinzu.

Um also die Zahl 34,572 auszusprechen, würde man sagen, 34 Einheiten 572 Tausend. Theile. Und wären z. B. diese Einheiten Ruthen, so würde man sagen: 34 Ruthen und 572 Tausendtheile derselben.

Die Ursache dieses Aussprechens ist leicht zu begreifen, wenn man in der Zahl 34,572 bemerkt, daß die Ziffer 5 immer gleichen Werth behält, man mag 5 Zehntheile, 50 Hunderttheile oder 500 Tausendtheile nennen u. s. w, weil ein Zehntheil aus 10 Hunderttheilen, und ein Hunderttheil aus 10 Tausendtheilen u. s. w. zusammengesetzt worden ist. Gleiche Beschaffenheit hat es mit der Ziffer 7, die so wohl 7 Hunderttheile als 70 Tausendtheile genannt werden kann, weil 10 Tausendtheile ein Hunderttheil ausmachen.

Die Art der Einheiten der letzten Ziffer kann man leicht finden, wenn man vom Komma an, von der Linken zur Rechten nach und nach jeder Ziffer folgende Namen giebt: als Zehntheile, Hunderttheile, Tausendtheile, Zehntausendtheile u. s. w.

27.

Wären keine ganze Einheiten, sondern nur Theile derselben gegeben, so muß man eine Null an die Stelle der Einheit setzen. Um also 125 Tausendtheile vorzustellen, würde man schreiben 0,125. Wollte man aber 25 Tausendtheile schreiben, so würde man noch eine Null vorsetzen müssen, nicht allein um zu bezeichnen, daß keine Zehntheile vorhanden sind, son-

dern auch, um den folgenden Theilen ihren richtigen Werth zu geben. Man würde also 0,025 setzen. Aus eben dem Grunde würde man 0,0006 schreiben, um 6 Zehntausendtheile auszudrücken.

28.

Jetzt wollen wir die Veränderung untersuchen, die in einer Zahl entsteht, wenn man deren Komma versetzt. Weil das Komma den Platz der Einer bestimmt, und der Werth aller andern Ziffern nur davon abhängt, wie weit sie von dem Komma entfernt sind; so muß offenbar eine Zahl um 10, 100, 1000 u. s. w. mal kleiner werden, wenn das Komma eine, zwey, drey ꝛc. Stellen zur linken Hand hingerückt wird: umgekehrt aber 10, 100 ꝛc. mal größer, wenn man es eine, zwey ꝛc. Stellen zur Rechten setzt. Hätten wir also die Zahl 4327,5264 und setzten ihr Komma eine Stelle weiter zur Linken; so ist offenbar, daß die Tausende der ersten Zahl in dieser, Hunderte; die Hunderte Zehner; die Zehner Einer; die Einer Zehntheile, die Zehntheile Hunderttheile u. s. w., mithin ein jeder Theil durch Versetzung des Komma zehnmal kleiner geworden ist. Setzen wir aber umgekehrt das Komma eine Stelle weiter znr Rechten, wie in 43275,264; so würden von der ersten Zahl die Tausende Zehntausende, die Hunderte Tausende, die Zehner Hunderte; die Einer Zehner; die Zehntheile Einer u. s. w. und mithin die ganze Zahl zehnmal größer geworden seyn.

Eben so siehet man auch ein, daß eine Zahl 100, 1000 mal ꝛc. kleiner werde, wenn man ihr Komma um zwey, drey Stellen zur Linken rückt, und umgekehrt,

um 100 mal oder 1000 mal größer, wenn man es zwey, drey Stellen zur Rechten setzt.

29.

Die letzte Bemerkung, die wir nun noch über die zehntheiligen Zahlen machen, ist diese, daß ihr Werth in nichts verändert werde, wenn man ihrer letzten zehntheiligen Ziffer jede beliebige Menge Nullen anhängt. Es gilt also 43,25 eben so viel als 43,250 oder 43,2500, oder 43,25000 u. s. w.

Denn, da jedes Hunderttheil 10 Tausendtheile oder 100 Zehntausendtheile u. s. w. gilt, so müssen die 25 Hunderttheile eben so viel ausmachen, als 250 Tausendtheile, oder als 2500 Zehntausendtheile u. s. w. Mit einem Wort, es ist eben so, als wenn man, 3 Groschen, durch 36 Pfennige ausdrückt.

Von den Rechnungsarten.

30.

Die vier Hauptrechnungsarten sind: Addiren, Subtrahiren, Multipliciren und Dividiren. Alle Fragen, die in Zahlen gegeben werden, lassen sich durch einige dieser Rechnungsarten, oder durch alle auflösen; daher es höchst nothwendig ist, den Sinn derselben recht zu verstehen, und sie sich ganz bekannt zu machen.

31.

Da nun, wie bereits gesagt worden, der Zweck der Arithmetik kein anderer ist, als Mittel an die Hand zu geben, mit Zahlen auf eine leichte Art zu rechnen; so müssen diese Mittel dazu dienen, die Rechnung der zusammengesetzten Zahlen auf eine Rechnung einfacher, oder solcher Zahlen zurückzuführen, die durch die möglichst kleinste Menge Ziffern ausgedrückt werden. Dies wollen wir nun näher auseinander setzen.

Von der Addition der ganzen und zehntheiligen Zahlen.

32.

Den Werth verschiedener Zahlen durch eine einzige Zahl ausdrücken, heißt Addiren. Wenn die Zahlen, welche man zusammensetzt, nur eine einzige Ziffer haben, so bedarf es keiner Regel; haben sie aber mehrere Ziffern, so findet man ihren Werth, den man die Summe der Zahlen nennt, durch Beobachtung folgender Regel.

Man schreibe die gegebenen Zahlen dergestalt untereinander, daß die Ziffern der Einer, der Zehner, der Hunderte u. s. w. eigene Reihen machen, ziehe unter sämmtliche Reihen eine Linie, und addire sodann alle Zahlen, welche die Stellen der Einer einnehmen. Geht nun die Summe derselben nicht über 9, so setzt man sie unter die Einer. Sollte sie aber 9 übertreffen; so sind auch Zehner darin enthalten, und man setzt dann nur den Ueberschuß der Zehner an gedachte Stelle.

Eben diese Regel beobachte man auch bey den Zehnern, zu deren Summe die vorher aus der Summe der Einer enthaltenen Zehner hinzugenommen werden, und fahre so von Reihe zu Reihe bis zur letzten fort, deren Summe ausgeschrieben wird.

Folgende Beyspiele mögen diese Regel noch deutlicher machen.

Erstes Beyspiel.

Soll zu der Zahl 54925 die Zahl 2023 addiret werden; so schreibe man beyde Zahlen folgendermaßen unter einander.

54925
2023
Summa 56948

Nachdem diese Zahlen unterstrichen worden, fängt man bey den Einer an, indem man sagt: 5 und 3 geben 8, welche man unter die addirten Zahlen setzt.

Sodann gehe man zu den Zehnern über, und sage: 2 und 2 geben 4. Diese werden unter die Zehner gesetzt. Ferner sagt man bey der Reihe der Hunderte: 9 und 0 geben 9, die unter die Hunderte geschrieben werden. Bey der Reihe der Tausende, sage man: 4 und 2 geben 6, die unter die Tausende zu stehen kommen. Endlich bey der Reihe der Zehntausende sage man: 5 und nichts geben 5, die man unter die Zehntausende setzen muß.

Die Zahl 56948, welche durch dieses Verfahren erhalten wird, ist also offenbar die Summe beyder gegebenen Zahlen, weil sie ihre Einer, Zehner, Hunderte, Tausende und Zehntausende enthält, und von denselben nach und nach zusammen gesetzt worden ist.

Zweytes Beyspiel.

Man verlangt die Summe der vier folgenden Zahlen 6903, 7854, 953, 7327, welche man folgendermaßen unter einander setzt:

6903

6903
7854
953
7327

Summa 23037

Wir fangen hier wie im ersten Beyspiele von der rechten Hand an, und sagen: 4 und 3 geben 7, und 3 dazu macht 10, und 7 macht 17. Von dieser Summe werden die 7 Einer unter die Reihe der Einer hingeschrieben, und die 10 als eine Einheit der folgenden Reihe, welche ebenfalls Zehner enthält, im Sinn behalten.

Nimmt man nun die zweyte Reihe vor, so sagt man: die im Sinn behaltene 1 und 0 giebt 1, und 5 geben 6, und 5 macht 11, und 2 macht 13, schreibt sodann die 3 unter die Zehner, und behält wieder die erhaltenen Zehner dieser Reihe, oder eigentlicher zu reden, das eine Hundert im Sinn. Wird ferner zur Reihe der Hunderte übergegangen; so sagt man weiter: 1 und 9 geben 10, und 8 macht 18, und 9 macht 27, und 3 macht 30, setzt dann abermals die 0 unter die addirte Reihe, und behält die entstandenen 3 Einheiten der folgenden Reihe im Sinn. Endlich sagt man: 3 und 6 macht 9, und 7 macht 16, und 7 macht 23, die 3 wird wieder unter dieselbe Reihe, die 2 aber eine Stelle weiter zur Linken gesetzt, weil keine andere Zahl mehr zu addiren vorkommt.

Folglich erhalten wir 23037 zur Summe der gegebenen Zahlen.

33.

Werden zehntheilige Zahlen gegeben, bey denen auch wie bey den Ganzen, zehn Einheiten einer Stelle, eine Einheit der nächsten Stelle zur Linken bestimmen; so befolget man bey ihnen ebenfalls die oben gegebene Regel, nachdem man die Einheiten jeder Ordnung reihenweise unter einander gesetzt hat.

Soll man also die drey Zahlen 72,957; 12,8; 124,03 zusammen addiren, so setzt man:

72,957
12,8
124,03

Summa 209,787

Wenn man nun die obige Regel befolgt; so ergiebt sich für die Summe 209,787.

Noch ist zu bemerken, daß man sich, um die Addition vorzustellen, des Zeichens +, welches plus heißt, bedient, und es zwischen die zu addirenden Größen stellet. Also bezeichnet 5 + 3, daß 5 zu 3, und 7 + 2 + 9, daß 7 zu 2, und deren Summe zu 9 addirt werden soll. Da nun die Größen in verschiedenen Fällen einander gleich seyn können; so ist man, um dieses anzuzeigen, überein gekommen, sich des Zeichens =, welches gleich heißt, zu bedienen. Also bedeutet 5 + 3 + 9 = 17, daß die Summe von 5, 3 und 9 gleich 17 ist.

Von der Subtraction der ganzen und zehntheiligen Zahlen.

34.

Die Subtraction ist eine Operation, durch welche man eine Zahl von der andern abziehet. Das, was daher entstehet, wird der Rest, Ueberschuß, Unterschied, oder Differenz, genannt.

35.

Will man subtrahiren, so schreibe man die Zahl, welche man abziehen will, unter die andere, von der

abgezogen werden soll, und ziehe eben so, wie bey der Addition geschehen ist, eine Linie darunter. Sodann fange man von den letzten Ziffern zur Rechten an, die untere von der obern abzuziehen, und gehe also zur Linken fort, nemlich Einer von Einern, Zehner von Zehnern u. s. w., von denen jeder Ueberschuß, und wenn nichts übrig bleibt, die o, unter die abgezogenen Zahlen gesetzt wird.

Findet man die untere Ziffer größer als die über ihr stehende, so giebt man der letzten noch zehn Einheiten dadurch, daß man von der ihr zunächst linkerhand stehenden, in Gedanken eine Einheit borgt und ihr zueignet, dafür aber im weitern Verfolg diese Zahl um eins vermindert ansiehet.

Erstes Beyspiel.

Verlangt man, daß 5432 von 8954 abgezogen werden soll; so schreibt man diese Zahlen folgendermaßen unter einander.

8954
5432
Unterschied 3522

Indem man nun bey den Ziffern der Einer anfängt, so sagt man: 2 von 4 bleibt 2, welche man unter die Einer schreibt. Hierauf geht man zu den Zehnern über, und sagt: 3 von 5 bleibt 2, welche man unter die Zehner schreibt. Ferner bey der dritten Reihe: 4 von 9 bleibt 5, die unter diese Reihe gesetzt werden, und endlich bey der vierten Reihe: 5 von 8 bleibt 3, welcher Rest wieder unter diese Reihe geschrieben wird; wodurch man also 3522 zum Unterschied der gegebenen Zahlen erhält.

Zweytes Beyspiel.

Soll man 7987 von 27646 abziehen, so schreibt man

27646
7987
Unterschied 19659

Da man die 7 von der 6 nicht wegnehmen kann; so setzt man zu 6 noch 10 Einheiten, welche man dadurch erhält, daß man von der ihr zunächst linkerhand stehenden Ziffer 4, eine Einheit borgt, hinzu, und sagt nun; 7 von 16 bleibt 9, welche man unter die 7 schreibt.

Geht man nun zu den Zehnern über, so kann man nicht mehr sagen: 8 von 4, sondern nur 8 von 3, denn das Geborgte hat die 4 um 1 verringert. Da man aber nicht 8 von 3 abziehen kann, so setzt man auch zur 3, zehn Einheiten, die man erhält, indem man eine Einheit zur Linken von der Ziffer 6 borgt, und dann sagt: 8 von 13 bleibt 5, welche man unter die 8 schreibt. Geht man nun zur dritten Reihe über; so sagt man ebenfalls. 9 von 5, oder sogleich 9 von 15, indem man auf erst angezeigte Art borgt, bleibt 6, die unter die 9 geschrieben wird.

Aus eben demselben Grunde sagt man ferner in der vierten Reihe: 7 von 6, oder sogleich 7 von 16 bleiben 9, welche man unter die 7 setzt. Weil aber nun in der fünften Reihe nichts abzuziehen ist; so schreibt man nicht die 2 unter dieselbe, sondern, da man von derselben eine Einheit geborgt hat, nur eine 1. Folglich erhält man 19659 zum Unterschied der gegebenen Zahlen.

36.

Wenn die Ziffer, von der man borgen soll, eine Null ist, so borgt man eigentlich nicht von der Null, sondern von der ersten bedeutenden Ziffer, welche nach ihr kommt; und ob man gleich 100, 1000 oder 10000 borgt, je nachdem 2, 3 oder 4 Nullen auf einander folgen, so verfährt man hier doch eben so als oben gezeigt worden, nemlich, man setzt 10 zu der Ziffer hinzu, bey welcher man borgt; und wie diese 10 von denen 100, 1000, 10000 u. s. w., die man in Gedanken geborgt hat, genommen sind, eben so nimmt man, um die übrigbleibenden 90, 990, 9990 anzuwenden, die folgenden

Nullen als eben so viel Neunen, welches folgendes Beyspiel deutlich machen wird.

Drittes Beyspiel.

Wenn von 20064
17489 abgezogen werden soll, so ist der
Unterschied 2575.

Hier sagt man zuerst: 9 von 4, oder sogleich 9 von 14 bleibt 5. Ferner, da man von 5 die 8 wegnehmen soll, und dieses so wenig geschehen kann, als von den unmittelbar folgenden Nullen eine Einheit zu borgen ist, so muß man die nöthige Einheit von der 2 nehmen. Diese enthält aber von denen Einheiten bey welchen der Abzug geschehen soll, 1000; weshalb von denselben 10 genommen und zu 5 addirt werden: worauf man sagt: 8 von 15 bleiben 7.

Da man nun von den 1000 Einheiten nur 10 geborgt hat, so ziehet man von den gebliebenen 990 die Zahlen ab, welche unter den Nullen stehen, welches eben so viel ist, als wenn man jede Null 9 gelten läßt; also wird man sagen: 4 von 9 bleiben 5, nächstdem 7 von 9 bleiben 2, und endlich 1 von 1 bleibt nichts.

Wenn in den Zahlen, die von einander abgezogen werden sollen, zehntheilige Brüche angetroffen werden; so folgt man durchaus der vorhergehenden Regel. Um aber bey der Anwendung derselben alle Verwirrung zu vermeiden, darf man nur die Menge der zehntheiligen Ziffern in beyden gegebenen Zahlen gleich machen; welches dadurch geschieht, daß derjenigen Zahl, welche die wenigsten zehntheiligen Ziffern hat, eine hinlängliche Menge Nullen angehängt wird, eine Vorbereitung, welche (nach §. 29) den Werth der Zahl um nichts verändert.

Viertes Beyspiel.

Soll also von 5403,25
abgezogen werden 385,6532

so setzt man zwey Nullen zu den zehntheiligen Ziffern der obern Zahl, und verfährt dann mit diesen vorbereiteten Zahlen ganz genau nach dem, was bey der Regel gesagt worden ist, wo man also

5403,2500
385,6532

5017,5968 zum Unterschied findet.

Man kann auch die Ziffer, von der man 1 borgt, unverändert lassen, und dagegen die unter ihr stehende Ziffer um eine Einheit vermehren; wodurch man denselben Unterschied erhält.

Die Subtraction anzuzeigen, bedienet man sich des Zeichens —, welches minus heißt, und zwischen die zu subtrahirenden Größen gesetzt wird. Also würde 5 — 3 anzeigen, daß die Größe 3 von 5 abgezogen werden soll, und 5 — 3 = 2 zeigt an, daß die Differenz der Zahlen 5 und 3 = 2 ist.

Von der Probe der Addition und Subtraction.

Unter der Probe einer Rechnung versteht man eine andere Rechnung, durch die man sich von der Richtigkeit des Resultats der ersten Rechnung versichert.

Die Probe der Addition besteht darin, daß man von neuem die gegebenen Zahlen, aber von der Linken anfangend, reihenweise zusammen setzt, und die

so herausgebrachten einzelnen Summen von der unter ihnen in der Summe stehenden Zahl abzieht. Bleibt nun ein Rest, so hat man denselben als Zehner zu der in der Summe zur Rechten stehenden Ziffer zu nehmen; zuletzt aber darf nichts übrig bleiben, sonst ist die Summe der gegebenen Zahlen nicht richtig.

Hätte man also in einem vorhergehenden Beyspiel gefunden, daß folgende vier Zahlen

6903
7854
953
7327

23037 zur Summe haben

ZIIØ

so überzeugt man sich von deren Richtigkeit, wenn man eben diese Zahlen von der Linken an addirt; und sagt: 6 und 7 macht 13, und 7 macht 20, die von 23 abgezogen, 3, oder 3 Zehner lassen, welche, mit der folgenden Ziffer 0 verbunden, 30 machen. Nun gehe man zur zweyten Reihe und sage: 9 und 8 macht 17, und 9 machen 26, und 3 machen 29, welche von 30 abgezogen, 1, oder einen Zehner geben, der mit der folgenden Ziffer 3 vereiniget, 13 giebt. Ferner addire man alle Zahlen der dritten Reihe und sage: 5 und 5 macht 10, und 2 macht 12, die von 13 abgezogen, 1, oder einen Zehner geben, welcher zu der folgenden Ziffer 7 addiret, 17 entstehen läßt. Also addiret man alle Zahlen der letzten Reihe und sagt: 3 und 4 macht 7, und 3 macht 10, und 7 macht 17, welche von 17 abgezogen, keinen Unterschied lassen; woraus man folglich schließt, daß dieses Beyspiel richtig addiret worden.

Man kann sicher schließen, daß die erste Operation richtig ist, wenn nach dieser Probe nichts übrig bleibt. Denn da man alle Tausende, alle Hunderte, alle Zehner und alle Einer, woraus die

Summe zusammengesetzt war, successive abgezogen hat, so muß auch zuletzt nichts übrig bleiben.

39.

Die Probe der Subtraction hingegen besteht darin, daß man den gefundenen Unterschied zu der abgezogenen Zahl addirt. Ist dann die gefundene Summe der größern gegebenen Zahl gleich, so ist die erste Rechnung richtig.

So siehet man, daß in den obigen dritten Beyspiel richtig gerechnet worden, weil die abgezogene Zahl 17489 zu dem Unterschiede 2575 addirt, die größere Zahl 20064 hervorbringt, und diese die Zahl ist, wovon abgezogen worden.

20064
17489
2575 Unterschied
20064 Probe.

Beyspiele für die Addition und Subtraction.

Die Armee einer Monarchie besteht
aus 238500 Mann Infanterie
aus 65840 — Cavallerie
aus 10830 — Artillerie
aus 12640 — an verschiedenen andern Korps.
Wie stark ist wohl die Kriegsmacht?

Antwort: 327810 Mann.

2.

Die Stadt Trier wird in der Geschichte um 1300 Jahr älter als die Stadt Rom angegeben. Da nun Rom 753 Jahr vor Christi Geburt soll erbauet worden seyn: wie alt ist wohl die Stadt Trier in diesem Jahre 1799?

Antwort: 3852 Jahr.

3.

Amerika ist von Christoph Kolumbus im Jahr 1492 entdeckt worden. Wie lange ist es nun in diesem Jahre 1799, daß wir von diesem Welttheile eine Kenntniß haben?

Antwort: 307 Jahr.

4.

Eine Armee ist 280000 Mann stark ins Feld gezogen: im ersten Feldzuge verlohr sie 25648 Mann; dagegen erhielt sie 36800 Mann Rekruten; im zweyten Feldzuge verlohr sie 38794 Mann, erhielt aber 40500 Rekruten; im dritten Feldzuge verlohr sie 8456 Mann, und erhielt einen Zuwachs von 50000 Rekruten. Wie stark ist wohl die Armee nach Ende des dritten Feldzuges?

Antwort: 334402 Mann.

Bey dergleichen Aufgaben, wie diese letztere ist, addirt man die nach und nach erhaltenen Rekruten für sich und auch die Verlohrnen für sich; zieht hernach die kleinere Summe von der größern ab, den Rest addirt oder subtrahirt man zu der Mannschaft der Armee, je nachdem mehr oder weniger Rekruten als Verlohrne da sind.

Von der Multiplication.

40.

Eine Zahl mit der andern multipliciren, heißt, die eine so oft nehmen, als die andere Einheiten enthält. Also 4 mit 3 multipliciren, heißt, 4 dreymal nehmen.

41.

Die zu multiplicirende Zahl wird der Multiplicandus, die multiplicirende Zahl der Multi-

plicator, und die Zahl, welche durch die Multiplication entstehet, das Product genannt.

42.

Gemeiniglich hat dies Wort Product einen weit umfassenden Sinn, weshalb wir hier mit Bedacht anzeigen, daß wir durch dasselbe blos das durch die Multiplication entstehende Resultat verstehen.

Auch werden der Multiplicandus und Multiplicator die Factoren des Products genannt. So sind 3 und 4 die Factoren von 12, weil 3 mal 4 zwölfe geben.

43.

Nach dem Begriffe also, den wir von der Multiplication haben, siehet man, daß dieselbe verrichtet werden kann, wenn man den Multiplicandus so oft hinschreibt, als der Multiplicator Einheiten enthält, und diese Zahlen zusammen addirt. Z. B. es soll 7 mit 3 multiplicirt werden, so kann man schreiben

7
7
7

21

Die aus dieser Addition entstehende Summe 21 wird folglich das Product von 3 mal sieben seyn.

Wäre aber der Multiplicator auch nur wenig beträchtlich, so siehet man wohl, daß die also geführte Rechnung sehr weitläufig werde; deshalb wird eigentlich die Art uud Weise, dieses Product auf

einem weit kürzern Wege zu erhalten, die Multiplication genannt.

44.

So lange nun die Zahlen unbenannt sind, oder als solche betrachtet werden können, so gilt es gleich viel, welche von beyden zum Multiplicator oder zum Multiplicandus genommen wird.

Z. B. Sollte man 4 mit 3 oder 3 mit 4 multipliciren, so ist es gleichgültig, ob man 4 mit 3 oder 3 mit 4 multiplicirt, weil das Produkt jederzeit 12 seyn wird: denn wirklich ist 3 mal 4 nichts anders als das Dreyfache von 1 mal 4, und 4 mal 3 nichts anders als das Dreyfache von 4 mal 1. Ohnstreitig ist aber 4 mal 1 und 1 mal 4 gleichgeltend. Dieser Beweis läßt sich bey allen andern Zahlen anwenden.

45.

Sollten aber in einer Aufgabe der Multiplicator und der Multiplicandus benannte Zahlen seyn, so ist es höchst nöthig, beyde von einander zu unterscheiden; vornehmlich aber hat man solches bey der Multiplication der kompleren Zahlen zu beobachten, von denen wir weiter unten sprechen werden.

Uebrigens ist dies sehr leicht zu unterscheiden, weil die zur Multiplication führende Aufgabe jederzeit zu erkennen giebt, welche Größe mehreremal wiederholt werden muß, oder welche der Multiplicandus, und durch welche Größe diese Wiederholung geschehen soll, oder welche der Multiplicator ist.

46.

Da der Multiplicator bestimmt ist, anzuzeigen, wie oft der Multiplicandus genommen werden soll, so ist er jederzeit eine unbenannte Zahl.

Wenn also ein Centner Schießpulver 24 Thaler kostete, und man wissen wollte, wie viel 52 Centner kosten möchten, so erkennt man, daß hier der Multiplicandus 24 Thlr. ist, die man 52 mal wiederholen soll, es mögen übrigens die 52, Centner oder andere Dinge bedeuten.

47.

Das Product, welches durch die Addition des wiederholten Multiplicandus entsteht, muß also mit dem Multiplicandus aus Einheiten einerley Art bestehen.

Und nun können wir, nach dieser kleinen Ausschweifung über die Eigenschaften der Einheiten des Produkts und seiner Factoren, wiederum zu der Art und Weise zurückkehren, ein Product zu finden.

48.

Da die Regeln zur Multiplication aller möglichen Zahlen auf die Multiplication der Zahlen, die mit einer Ziffer bezeichnet sind, gegründet werden; so muß man sich sehr üben, die entstehenden Producte, wenn eine jede derselben nach und nach zu sich selbst addirt wird, schnell zu finden. Auch kann man dabey von folgender, dem Pythagoras zugeschriebenen Tafel, beliebigen Gebrauch machen.

1	2	3	4	5	6	7	8	9
2	4	6	8	10	12	14	16	18
3	6	9	12	15	18	21	24	27
4	8	12	16	20	24	28	32	36
5	10	15	20	25	30	35	40	45
6	12	18	24	30	36	42	48	54
7	14	21	28	35	42	49	56	63
8	16	24	32	40	48	56	64	72
9	18	27	36	45	54	63	72	81

Von dieser Tafel entstehet die erste Reihe, wenn man nach und nach 1 zu sich selbst addirt.

Die zweyte, wenn nach und nach 2 zu sich selbst addirt wird; eben so die dritte, wo 3 zu sich selbst addirt wird, u. s. w.

49.

Um nun vermittelst dieser Tafel das Product zweyer Zahlen, von denen jede mit einer Ziffer ausgedrückt ist, zu finden, sucht man eine derselben, z. B. den Multiplicandus, in der obersten Reihe, begiebt sich dann von ihr so weit herunter, bis man den Multiplicator, der in der ersten senkrechten Reihe zu finden ist, gegenüber steht; so giebt die Zahl, bey der man stehen geblieben, das verlangte Product.

Um also das Product von 9 und 6 zu finden, oder wie viel 6 mal 9 geben, sucht man 9 in der obersten Reihe; von dieser gehet man herunter, bis man der 6 gegenüber steht. Dann findet man da, wo man stehen geblieben ist, 54. Folglich muß 6 mal 9 nicht weniger als 54 geben.

Nun sind wir im Stande, zu der Multiplication der durch mehrere Ziffern ausgedrückten Zahlen überzugehen.

Von der Multiplication mit einer einziffrigen Zahl.

50.

Man schreibe den Multiplicator, den man hier als eine Ziffer voraus setzt, unter den Multiplicandus, und zwar unter die Ziffer der Einer, nicht, als ob er in dieser Stelle stehen müßte, sondern um die Ideen zu fixiren.

Sodann multiplicirt man mit dem Multiplicator zuerst die Zahl der Einer, und schreibt das Product, wenn es blos Einer enthält, hierunter; enthält es aber Einer und Zehner, so schreibt man nur die Einer dieses Products hin, und behält deren Zehner, als Einheiten der folgenden Stelle im Sinn.

Hierauf multiplicire man die Zahl der Zehner des Multiplicandus, füge die im Sinn behaltenen Einheiten zum Producte und schreibe das Erhaltene hierunter, wenn es aus einer Ziffer besteht. Sollte dieses aber nicht seyn, so setze man nur die Einheiten dieses Products hin, und behalte deren Zehner als Hunderte im Sinn, die zu dem folgenden Product, welches aus Hunderten besteht, addirt werden.

Man fahre endlich nach eben derselben Regel fort, alle Ziffern des Multiplicandus zu multiplicieren; die hieraus entstehenden Ziffern werden dann das Produkt geben.

Beyspiel.

Man verlangt zu wissen, wie viel Fuß 2864 Toisen enthalten, wenn 6 pariser Fuß eine Toise bestimmen.

Die Auflösung dieser Aufgabe geschiehet dadurch, daß man 6 Fuß 2864 mal, oder welches einerley ist, 2864 Fuß 6 mal nimmt.

Folglich schreibt man 2864 Multiplicandus
6 Multiplicator
17184 Product.

und sagt, von den Einern anfangend: 6 mal 4 ist 24, man schreibt also die 4 hin, und behält die 2 als Einheiten der folgenden Stelle im Sinn.

2) 6 mal 6 ist 36 und die im Sinn behaltene 2, macht 38; man schreibt also nun 8 hin und behält 3 im Sinn.

3) 6 mal 8 ist 48 und die im Sinne behaltene 3 macht 51; mithin schreibt man 1 hin und behält 5 im Sinn.

4) 6 mal 2 ist 12 und die im Sinn behaltene 5, macht 17; welche ganz hingeschrieben werden, weil nichts mehr zu multipliciren ist. Die Zahl 17184 ist also das verlangte Product, oder die Anzahl Fuße, welche die 2864 Toisen enthalten. Denn es enthält nicht allein die 4 Einheiten, sondern auch die 6 Zehner, 8 Hunderte und 2 Tausende, folglich die ganze Zahl 2864, sechsmal in sich.

Von der Multiplication mit einer vielziffrigen Zahl.

51.

Wenn der Multiplicator aus mehrern Ziffern besteht, so multiplicire man mit einer Ziffer nach der andern, nach vorgeschriebener Art, wo mit einer Ziffer multiplicirt wurde, und zwar immer von der rechten Hand anfangend. Dem zu folge multiplicirt man erst alle Ziffern des Multiplicandus durch die Ziffer der Ein-

heit des Multiplicators, und nachher durch die Ziffer der Zehner. Das hierdurch entstehende Product schreibt man unter das vorhergefundene, jedoch so, daß es eine Stelle weiter zur Linken gesetzt wird. Denn dieses jetzt erhaltene Product müssen Zehner seyn, weil mit Zehnern multiplicirt worden ist; folglich muß auch jede Ziffer des ganzen Products um eine Stelle weiter zur Linken gerückt werden.

Das dritte Product, welches entsteht, wenn man mit den Hunderten multiplicirt, wird ebenfalls unter das zweyte, aber wieder eine Stelle weiter zur Linken gesetzt. Und so folgt man diesem Gesetz bey allen übrigen Producten.

Ist nun mit allen Ziffern multiplicirt worden, so addirt man die gefundenen einzelnen Producte zusammen. Ihre Summe giebt dann das ganze Product.

Beyspiel.

Man soll multipliciren 65487
mit 6958

523896
327435
589383
392922

455658546 Product.

Man multiplicirt zuerst 65487 durch die Zahl 8, welche die Einer des Multiplicators enthält, und schreibt unter die Linie die Ziffern des Products 523896, die nach der gegebenen Regel wie im ersten Beyspiele, gefunden und gesetzt werden.

Hierauf multiplicirt man eben diese Zahl 65487 durch die zweyte Zahl des Multiplicators, nehmlich durch 5, und schreibt das Product 327435 unter das erste Product dergestalt, daß die

erste

erste Product, dergestalt, daß die erste Ziffer 5 unter die Zehner dieses Products zu stehen komme.

Multiplicirt man nun 65487 durch die dritte Ziffer 9, so wird auch dieses Product unter das Vorhergehende dergestalt geschrieben, daß die erste Ziffer 3 in die Stelle der Hunderte kommt, weil die multiplieirte Zahl Hunderte enthält.

Endlich multiplicirt man 65487 mit der letzten Ziffer des Multiplicators, schreibt das Product 392922 unter das Vorhergehende eine Stelle weiter, damit dessen niedrigste Ziffer die Stelle der Tausende einnehme, weil die multiplicirende Zahl Tausende enthält. Zuletzt addire man sämmtliche Producte, wodurch man die Zahl 455658546 zum Product von 65487 und 6958 erhält. Denn man hat 65487 im ersten Product 8 mal, im zweyten 50 mal, im dritten 900 mal, und im vierten Product 6000 mal genommen.

52.

Wäre dem Multiplicator oder dem Multiplicandus, oder allen beyden, Nullen angehängt; so könnte man die Rechnung dadurch abkürzen, wenn man beyde Zahlen mit einander, ohne weiter auf die Nullen zu achten, multiplicirt und dem Producte so viel Nullen, als beyde Factoren haben, anhängt.

Beyspiel.

Es sey also 6500
mit 350 zu multipliciren

325
195

2275000

Man multiplicirt hier demnach bloß 65 mit 35 und erhält 2275 zum Product, welchem noch die in den beyden Factoren befindlichen 3 Nullen angehängt werden müssen. Denn wir haben im Multiplicandus nicht 65, sondern 65 Hundert, und müßten folglich auch Hunderte im Product erhalten, wenn der Multiplicator bloß 35 gewesen wäre: da derselbe aber aus 35

Zehner besteht, so muß auch das Product aus demselben in den Hunderten zehnmal größer, folglich Tausende seyn, weshalb dem Producte 3 Nullen angehängt werden mußten. Dieser Beweis kann bey einem jeden solchen Fall auf eine ähnliche Art geführt werden.

53.

Finden sich Nullen zwischen den Ziffern des Multiplicators, so giebt die Multiplication mit diesen Nullen wieder Nullen, die man nicht unter die vorhergefundenen Producte setzt, sondern man gehet gleich zur Multiplication der auf die Nullen folgenden bedeutenden Ziffern über, und rückt das dadurch entstehende Product um eine Stelle höher, als Nullen im Multiplicator angetroffen werden: nehmlich bey einer Null um zwey Stellen, bey zwey Nullen um drey Stellen u. s. w.

Beyspiel.

Man soll multipliciren 42052 mit

3006

252312

126156

126408312

Nachdem hier mit 6 multiplicirt, und das Product 252312 hingeschrieben worden ist: multiplicirt man sogleich mit 3, und schreibt das entstehende Product 126156 dergestalt, daß es Tausende bezeichnet. Man muß es demnach um drey Stellen höher setzen, das ist, um eine Stelle höher, als Nullen im Multiplicator angetroffen werden.

Von der Multiplication mit Decimalbrüchen.

54.

Um zehntheilige Zahlen mit einander zu multiplicieren, verfährt man bey ihnen eben so, wie bey den ganzen Zahlen, ohne auf das Komma zu achten. Wenn man aber das Product gefunden hat, so schneidet man in demselben eben so viel Decimalstellen ab, als in den gegebenen Zahlen zusammen befindlich sind.

Erstes Beyspiel.

54,23 soll mit
8,3 multiplicirt werden

16269
433844

450,109

Multiplicirt man 5423 mit 83, so erhält man 450109 zum Product; in welchem also 3 zehntheilige Stellen abgeschnitten werden müssen, weil der Multiplicandus zwey und der Multiplicator eine hat, wodurch man demnach 450,109 erhält.

Der Grund dieser Regel ist leicht einzusehen, wenn wir folgendes bemerken. Wäre der Multiplicator 83, so müßte das Product (nach §. 49) Hunderttheile enthalten, weil im Multiplicandus Hunderttheile vorkommen, die 83 mal genommen werden sollen. Nun ist aber der Multiplicator 8,3 zehnmal kleiner als 83, wie wir angenommen hatten; mithin muß auch das entstehende Product zehnmal kleiner als das vorige seyn, und folglich nicht mehr Hunderttheile, sondern Tausendtheile enthalten, weshalb 3 zehntheilige Stellen

bemerkt werden müssen, als so viel wirklich in beyden gegebenen Zahlen angetroffen werden. Auf ähnliche Art läßt sich auch dieser Beweis bey allen andern Fällen anwenden.

Zweytes Beyspiel.

Soll man 0, 12
mit 0, 3 multiplicirenden
0,036

so multiplicirt man 12 mit 3, wodurch 36 entsteht. Nun will die Regel, daß in diesem Product 3 zehntheilige Stellen bemerkt werden sollen. Ihr Genüge zu thun, könnte man anfänglich wohl verlegen seyn, aber alsdann nicht mehr, sobald man diesen Fall nach dem vorigen Beyspiele beurtheilet, weil man nach demselben leicht erkennt, daß zwischen das Komma und 36 nur noch eine Null zu setzen nöthig sey, wie hier wirklich geschehen ist. Denn man sagt: wäre 0,12 mit 3 zu multipliciren, so würde man 0,36 erhalten, weil man aber nicht mit 3, sondern 0,3 das heißt, mit einer Zahl, die zehnmal kleiner als die vorige ist, zu multipliciren hatte, so mußte auch das Product 0,36 zehnmal kleiner, d. i., 0,036 werden, und folglich Tausendtheile enthalten.

Da man gewöhnlich die Decimalbrüche nur in der Absicht, die Rechnungen zu erleichtern, anwendet, indem man an die Stelle der sehr genauen Rechnung, eine hinlängliche aber schnelle Näherung setzt; so ist es nützlich, hier ein Mittel anzugeben, die Operation abzukürzen, wenn man nehmlich das Product nur bis zu einem angegebenen Grad von Genauigkeit nöthig hat.

Gesetzt man soll 45,625957 mit 28,635 multipliciren, und hätte das Product nur bis zu einem Tausendtheile nöthig; so würde man die Ordnung der Ziffern einer dieser Zahlen umkehren, und sie dann dergestalt unter einander schreiben, daß die Ziffer der Einer unter die zehntheilige Ziffer der zu multiplicirenden Zahl gesetzt wird, welche Ziffer um zwey Grad kleiner als diejenige ist, bey welcher das Product geendigt. Man macht

alsdann die Multiplication, indem man im Multiplicandus alle Ziffern vernachlässigt, die sich zur Rechten derjenigen finden, mit welcher man multiplicirt; und so wie man eine andere Ziffer des Multiplicators nimmt, so setze man immer die erste Ziffer des neuen Products unter die ersten Ziffer des vorhergehenden Products. Nach geschehener Addition läßt man die zwey letzten Ziffern weg, beobachtet aber, die letzte der bleibenden Ziffern um eine Einheit zu vergrößern, wenn die weggelassenen Ziffern 50 oder darüber betragen; Hierauf setzt man das Decimalzeichen an die Stelle, welche durch die Art der Decimalen, die man haben wollte, bestimmt ist.

Beyspiel.

45,625957
53682

91251914
36500760
2737554
136875
22810

1306499 xz
Product 1306499

Hätte man die Multiplication auf die gewöhnliche Art gemacht, so würde man 1306,499278695 gehabt haben, welches mit der vorhergehenden bis auf drey Decimalstellen, wie verlangt worden, stimmt.

Wenn in dem Multiplicandus nicht genug Decimalziffern sind, um die Ziffer der Einheiten des Multiplicators, derjenigen Ziffer, welche die Regel verlangt, entsprechen zu lassen, so ersetzt man solche durch Nullen.

Beyspiel.

Man soll 54,236
mit 532,27 multipliciren, und verlangt das Product bis auf ein Hunderttheil der Einheit genau:

Man schreibt 54,236000
72235

271180000
16270800
1084720
108472
37961

2886819ßß

Product 28868,20, wo die letzte Ziffer um eine Einheit vergrößert ist, weil die zwey weggelassenen Ziffern über 50 betragen.

Für ein drittes Beyspiel setze man, daß
0,227538917
mit 0,56664178 multiplicirt werden soll, und man will im Producte nicht mehr als 7 Decimalstellen haben, so schreibe man: 0,227538917
8714665o

.....
113760315
13652334
1365228
910112
2275
1589
176

1288820ßß
Product 0,1288821

Ueber einige Anwendungen der vorhergehenden Regel.

55.

Da wir nicht die Absicht haben, alle mögliche Anwendungen der Multiplication zu zeigen; so wollen wir nur diejenigen hier anführen, welche als Vorbereitung zu den übrigen dienen können.

56.

Allgemein dient nun die Multiplication dazu, den Werth einer jeden beliebigen Menge gleicher Größen zu bestimmen, so bald der Werth irgend einer von ihnen bekannt ist.

Wenn z. B. gefragt würde: Was kosten 5842 Centner Metall, wenn jeder Centner mit 54 Thaler bezahlt wird? so kann man 54 mit 5842, oder (nach §. 44) 5842 mit 54 multipliciren, wodurch man 315468 Thaler zum verlangten Preise der gegebenen Centner erhält. Oder wenn man wüßte, daß eine Bombe von 8 Zoll im Durchmesser 42 Pfund wöge, und es würde gefragt: wie viel wiegen 5954 Bomben von gleichem Durchmesser? so müßte man 42 mit 5954, oder 5954 mit 42; multipliciren, und man würde 250068 zum Totalgewicht der 5954 Bomben erhalten.

57.

Man wendet auch die Multiplication an, um Einheiten einer gewissen Art in noch kleinere zu verwandeln. So verwandelt man z. B. die Thaler in Groschen, und diese in Pfennige; die Ruthen in Fuße, diese in Zolle und und letztere in Linien; die Tage in Stunden, Minuten und Secunden, welche Verwandlung oft sehr nöthig ist, weshalb wir davon folgende Beyspiele geben wollen.

Will man z. B. wissen, wie viel Pfennige 8 Thlr. 17 Gr. 7 Pf. geben, so multiplicirt man man die 8 Thlr. mit 24, weil 24 Gr. einen Reichsthaler bestimmen (§. 51), wodurch 192 Gr. entstehen, zu welchen noch die 17 Gr. genommen, 209 Gr. geben; diese multiplicirt man dann mit 12, weil 12 Pf. einen Groschen bestimmen, so erhält man 2508 Pf., die zu denen obigen 7 Pf. genommen, 2515 Pf. betragen und den Werth der 8 Thlr. 17 Gr. 7 Pf. bestimmen.

Oder fragt man, wie viel Minuten geben ein gemeines Jahr, oder 365 Tage 5 Stunden 48 Minuten? so multiplicirt man 24 Stun-

den mit 365, weil der Tag 24 Stunden enthält, setzt zum entstehenden Producte der 8760 Stunden, obige 5 Stunden hinzu, multiplicirt hierauf die 8765 Stunden mit 60, weil eine Stunde 60 Minuten enthält, (nach §. 52), welches 525900 Minuten bestimmt, die, zu den 48 Minuten genommen, 525948 Minuten für das gemeine Jahr angeben.

Die Abkürzung, deren wir §. 52 gedacht haben, kann dazu dienen schnell eine gewisse Anzahl von Tonnen in Pfunde zu verwandeln; da die Gewichtstonne 2000 Pfund wiegt, und man z. B. 854 Tonnen hat, so darf man nur 854 verdoppeln, und an das Product drey Nullen hängen, dieses giebt 1708000 Pfund.

Ehe wir die Multiplication endigen, wollen wir die Anfängern noch bemerken lassen, daß die Ausdrücke verdoppeln, verdreyfachen, vervierfachen, u. s. w. das nemliche bedeute als mit 2, mit 3, mit 4 u. s. w. multipliciren.

Die Multiplication anzudeuten, bedient man sich des Zeichens $\times$, oder auch eines Punkts, welches, multiplicirt mit, heißt. Also würde 8×4 oder $8 . 4$ anzeigen, daß die Größe 8 viermal, oder die Größe 4 achtmal genommen werden soll; folglich wäre der Ausdruck $8 \times 4 = 8 . 4 = 32$.

Von der Division der ganzen und zehntheiligen Zahlen.

58.

Eine Zahl durch eine andere dividiren, heißt untersuchen, wie oft die eine derselben in der andern enthalten ist.

Die zu theilende Zahl wird der Dividendus, die theilende der Divisor, und diejenige, welche anzeigt, wie oft der Divisor in dem Dividendus enthalten ist, wird der Quotient genannt.

Ungeachtet man bey der Division nicht immer wissen will, wie oft eine Zahl in der andern enthalten ist; so verfährt man doch in allen Fällen so, als wenn dies die Absicht wäre, weshalb man die Division als eine Rechnung ansehen kann, durch die untersucht wird, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist.

Hieraus folgt, daß der Divisor mit dem Quotienten multiplicirt, jederzeit den Dividendus hervorbringen muß, weil der Divisor wirklich so oft genommen wird, als er im Dividendus enthalten ist, wobey übrigens der Quotient eine ganze oder gebrochene Zahl seyn kann.

Was aber die Gattung der Einheiten des Quotienten betrift, so ist wohl zu bemerken, daß sie weder nach dem Dividendus noch nach dem Divisors bestimmt werden können. Denn da es bey dem Quotienten bloß auf die Menge der Einheiten ankommt, und diese anzeigt, wie oft der Divisor in dem Dividendus enthalten ist, so kann die Gattung der Einheiten des erstern von der Gattung der Einheiten des letztern, ihrer

Natur nach, sehr verschieden seyn, je nachdem die Aufgabe beschaffen ist, die zur Division Anlaß giebt.

Wollte man z. B. wissen, wie oft 4 Pfund in 8 Pfund enthalten wären; so würde der Quotient die unbenannte Zahl 2 seyn. Verlangte man hingegen zu wissen, wie viel Ellen Tuch man für 8 Thlr. erhielte, wenn jede mit 4 Thlr. bezahlt wird; so muß der Quotient 2 Ellen seyn, welches eine benannte Zahl ist, deren Art der Einheiten so wenig mit der des Divisors als des Dividendus übereinstimmt.

Man siehet also, daß die, die Division veranlassende Aufgabe, allein die Art der Einheiten des Quotienten bestimmt.

Von der Division einer aus mehrern Ziffern bestehenden Zahl durch eine Zahl, die aus einer Ziffer bestehet.

59.

Das jetzt zu beschreibende Verfahren verlangt bloß die Kenntniß, wie oft eine Zahl von einer oder mehr Ziffern, eine Zahl von einer Ziffer enthält, welche Kenntniß man auch schon dadurch erlangt, wenn man die Producte der Zahlen von einer Ziffer auswendig weiß.

Man kann sich auch dabey der oben (48) gegebenen Tafel bedienen. Z. B. will man wissen, wie oft 9 in 74 enthalten ist; so sucht man den Divisor 9 in der obersten Reihe, geht sodann gerade herunter bis zu der von 74 nächst kleinern Zahl 72, und nimmt die in dieser Reihe stehende erste Zahl 8 zum Quotienten, welche dann anzeigt, wie oft 9 in 74 enthalten ist.

Dies vorausgesetzt, folgt hier, wie die Division einer Zahl von mehreren Ziffern durch eine einziffrige Zahl geschiehet.

Man schreibe den Divisor zur Seite des Dividendus, trenne beyde bloß durch einen Strich, und unterstreiche den Divisor, unter welchen dann der Quotient, wie er nach und nach entsteht, gesetzt wird.

Ferner nehme man die erste Ziffer linker Hand des Dividendus, und wenn diese nicht den Divisor enthält, die beyden ersten.

Dann untersuche man, wie oft der Divisor in der einen oder in den beyden Ziffern enthalten ist, und setze die gefundene Zahl unter den Divisor.

Sodann multiplicire man den so eben bestimmten Quotienten mit dem Divisor, und bringe das Product unter die dividirten Zahlen des Dividendus.

Endlich ziehe man das Product von der über demselben stehenden Zahl ab, wodurch ein Rest erhalten wird.

Ferner setze man, dem Rest zur Seite, die folgende Ziffer herunter, verfahre mit der dadurch bestimmten Zahl, wie mit der vorigen, setze deren Quotienten dem ersten zur Rechten, multiplicire ihn wiederum mit dem Divisor, und ziehe das entstehende Product ab, wie zuvor.

Eben so setzt man diesem Rest zur Seite die nächstfolgende Ziffer herunter, und fährt auf vorgezeigte Art so lange fort, bis keine Ziffer übrig bleibt. Diese Regel werden folgende Beyspiele noch deutlicher machen.

Beyspiel.

Soll man 8769 durch 7 dividiren, so schreibt man beyde Zahlen auf folgende Art.

Dividendus.		Divisor.
8769	1	7
7		1252 5/7 Quotient.
17		
14		
36		
35		
19		
14		
5		

fängt zur Linken des Dividendus an und untersucht, nicht, wie oft eigentlich 7 in 8 Tausend ; sondern schlecht weg wie oft ist 7 in 8 enthalten? Die Antwort ist: einmal. Diese 1, die natürlicherweise Tausend bedeuten muß, schreibt man unter den Divisor, wo dann die in der Folge noch entstehenden Ziffern, ihr zur Rechten gesetzt, derselben den wahren Werth geben.

Mit diesem Quotienten 1, multiplicirt man den Divisor 7, setzt das Product 7 unter die dividirte Zahl 8, ziehet es von dieser ab, so erhält man 1 zum Rest.

Dieser Rest, als ein undividirter Theil der 8, ist ein Zehner in Betracht der folgenden Ziffer 7, die deshalb demselben zur Seite herunter gesetzt, und hierauf mit der Rechnung fortgefahren wird, indem man spricht: 7 ist in 17, 2 mal enthalten. Diese 2 schreibt man dem in der ersten Rechnung erhaltenen Quotienten 1 zur Rechten.

Nun multiplicirt man wie vorher, den Divisor 7 mit dem so eben erhaltenen Quotienten 2, setzt das Product 14 unter den Dividendus 17, von welchem abgezogen, es den noch nicht dividirten Rest 3 giebt, dem man die dritte Ziffer des Dividendus zur Seite herunter setzt, und spricht: 7 ist in 36, 5 mal enthalten ; welchen Quotienten 5 man in seine Stelle setzt.

Ferner multiplicirt man den Divisor 7 mit 5, schreibt das entstehende Product 35 unter den Dividendus 36, von welchem

es abgezogen 1 zum Rest giebt, dem zur Seite man endlich die Ziffer 9 des Dividendus herunter setzt, und spricht: 7 ist in 19 2 mal enthalten; welche 2 man zum Quotienten setzt.

Multiplicirt man nun den Divisor 7 mit dem oben gefundenen Quotienten, setzt das entstandene Product 14 unter den letzten Dividendus, und ziehet es von demselben ab, so erhält man noch den Rest 5.

Und so findet man, daß 8769 die 7 so oft enthalte, als der Quotient anzeigt, nemlich 1252 mal, und daß überdies noch 5 übrig bleiben.

Was nun diesen Rest betrift, so begnügen wir uns, ihn gegenwärtig dem Quotienten, wie im Exempel zu sehen ist, also zur Seite zu setzen, daß unter ihn der Divisor zu stehen kommt, von welchem er durch einen Strich getrennt, und durch fünf Siebentheile ausgesprochen wird. Die Eigenschaften der Zahlen dieser Art werden wir aber in der Zukunft erklären.

60.

Sollte es sich in der Folge der Rechnung finden, daß eine zu dividirende Zahl den Divisor nicht enthielte; so muß man eine Null in den Quotienten setzen, und, weil diese nicht multiplicirt, die folgende Ziffer im Dividendus der undividirten Zahl zur Seite herunter rücken, und mit der Division fortfahren.

Beyspiel.

Man soll 14464 durch 8 dividiren

14464 |	8
8	1808
64	
64	
64	
64	
0	

Hier müssen die beyden ersten Zahlen des Dividendus genommen werden, weil die erste Ziffer den Divisor nicht enthält. Man findet also, daß 8 in 14 einmal enthalten ist, welche Eins zum Quotienten genommen, und mit 8 multiplicirt wird; wo dann das entstehende Product 8 von 14 abgezogen, den Rest 6 giebt, dem zur Seite man die dritte Ziffer 4 herunter setzt.

Man fährt nun fort und sagt: 8 ist in 64, 8 mal enthalten, welche 8 zum Quotienten geschrieben, mit dem Divisor multiplicirt, und das dadurch entstehende Product 64 von 64 abgezogen wird, welches dann den Rest 0 giebt, dem zur Seite man die vierte Ziffer 6 herunter setzt. Da nun 8 in 6 nicht enthalten ist, so wird eine Null zum Quotienten geschrieben, die letzte Ziffer 4 herunter gerückt, und dann gesagt: 8 ist in 64 achtmal enthalten. Die 8 setzt man in den Quotienten, multiplicirt dieselbe mit dem Divisor, und subtrahirt von 64 das Product 64, und schließt, da nichts übrig bleibt, daß 8 in 14464 genau 1808 mal enthalten sey.

Von der Division mit einer aus mehreren Ziffern bestehenden Zahl.

61.

Enthält der Divisor mehrere Ziffern, so muß man sich folgendermaßen verhalten.

Man nehme vom Dividendus so viel Ziffern zur Linken, als nach dem Divisor erforderlich sind, und untersuche nicht, wie bisher, wie oft der ganze Divisor in dem genommenen Theil des Dividendus, sondern wie oft die erste Ziffer des Divisors in der ersten, oder den beyden ersten Ziffern des Dividendus enthalten sey, und schreibe sodann den Quotienten unter den Divisor.

Hierauf multiplicire man mit dem Quotienten alle Ziffern des Divisors, nach der (§. 50) gegebenen

Regel, setze das Product unter die dividirte Zahl, ziehe es von selbiger ab, und rücke dem Rest die folgende Ziffer des Dividendus zur Seite, um auf ähnliche Art mit der Division fortfahren zu können; welches alles folgende Beyspiele deutlich machen, und jede noch dabey vorkommende Schwierigkeit aus dem Wege räumen werden.

Erstes Beyspiel.

Mann soll 75347, durch 53 dividiren.

75347	53
53	1421 $\frac{34}{53}$
223	
212	
114	
106	
87	
53	
34	

Da hier die beyden ersten Ziffern des Dividendus den Divisor enrhalten, so spricht man nicht: 53 ist in 75, sondern 5 Zehner von 53 sind in 7 Zehnern von 75, oder auch 5 ist in 7 einmal enthalten. Setzt man nun die 1 zum Quotienten, multiplicirt mit derselben den Divisor 53, setzt das Product 53 unter 75 und ziehet es davon ab; so erhält man 22 zum Rest, welchen die dritte Ziffer 3 des Dividendus zur Seite gesetzt wird.

Fährt man nun fort und sagt: 5 ist in 22, statt 53 ist in 223 viermal enthalten; setzt man die 4 in den Quotienten, und multiplicirt mit ihr die beyden Ziffern des Divisors, setzt das Product 212 unter die Zahl 223, und ziehet es ab; so erhält man 11 zum Rest, dem man die vierte Ziffer des Dividendus zur Seite setzt. Spricht man nunmehro 5 ist in 11 zweymal enthalten; schreibt die 2 in den Quotienten, multiplicirt mit ihr 53, setzt das entstehende Product 106 unter 114 und ziehet es davon ab, so

erhält man 8 zum Rest, welcher die letzte Ziffer des Dividendus zur Seite herunter gesetzt wird.

Dividirt man endlich diese 87, so erhält man 1 zum Quotienten und 34 zum Rest, der auf oben gezeigte Art dem Quotienten zur Seite geschrieben wird.

62.

Sollte man hier nach aller Schärfe verfahren, so müßte man jedesmal untersuchen, wie oft der ganze Divisor in einem Theil des Dividendus enthalten sey. Da aber dergleichen Untersuchung sehr beschwerlich und langweilig ist, so begnügt man sich bloß damit daß man untersucht, wie oft der höchste Theil des Dividendus den höchsten Theil des Divisors enthält, wie wir oben gesehen haben. Hierdurch erhält man zwar selten den wahren Werth des Quotienten, sondern oft nur den ihm nahe kommenden, durch den man aber auch zu eben dem Zweck geführet wird. Und sollte man denselben in einigen Fällen auch nicht sogleich erreichen, so kann der gefundene Werth doch nur um ein sehr geringes verschieden seyn, welches dann durch die darauf folgende Multiplication bald berichtiget wird.

Nehmen wir z. B. an, daß ein Theil des Dividendus den Divisor genau 3 mal enthalte, und glaubte durch einen Versuch überzeugt zu seyn, daß er ihn viermal enthielte; so ist leicht zu ersehen daß durch die Multiplication mit 4 ein zu großes Product erhalten werde, weil der Divisor mehrmal genommen worden, als er im Dividendus enthalten ist, wodurch der Abzug unmöglich wird. Dem-

nach muß man den Quotienten um 1, 2 u. s. w. Einheiten vermindern, bis man zu einem Product gelangt, welches abgezogen werden kann.

Uebrigens erlangt man bald die Fertigkeit, nach geschehenem Versuch einzusehen, um wie viel der Quotient vermehret oder vermindert werden muß.

Zweytes Beyspiel.

Man soll 189492 durch 375 dividiren

189492	375
1875	505$\frac{3}{4}$
1992	
1875	
117	

Hier nimmt man die vier ersten Ziffern des Dividendus, weil die ersten 3 den Divisor nicht enthalten, und sagt: 3 ist in 18 sechsmal enthalten. Multiplicirt man aber 375 mit 6, so ist das entstehende Product grösser als der Dividendus, weshalb man nur 5 zum Quotienten nehmen muß, der mit 375 multiplicirt, ein Product giebt, das von 1894 abgezogen, 19 Rest läßt.

Setzt man nun zur Seite dieser 19, vom Dividendus die Ziffer 9 herunter, und sagt: 375 ist in 199 nicht enthalten; setzt eine Null in den Quotienten, und rückt vom Dividendus die Ziffer 2 herunter; so erhält man 1992 zum neuen Dividendus.

Sagt man endlich: 3 ist in 19 sechsmal enthalten, schreibt aber aus oben angeführten Ursachen nur 5 in den Quotienten; so erhält man, nachdem weiter auf obige Art verfahren wird, 117 zum Rest.

Folgende Betrachtung kann in sehr vielen Fällen dienen, die unnützen Versuche zu vermeiden. Man ist vornehmlich diesen zweifelhaften Versuchen ausgesetzt, wenn die zweyte Ziffer des Divisors merk-

lich größer als die erste ist. In diesem Fall, anstatt zu untersuchen, wie viel mal die erste Ziffer des Divisors in dem entsprechenden Theile des Dividendus enthalten ist; muß man vielmehr suchen, wie viel mal diese erste Ziffer um 1 vermehrt, in dem entsprechenden Theile des Dividendus enthalten ist; dieser Versuch wird immer weit annähernder als der erste seyn.

Beyspiel.

Man verlangt 1832 mit 288 zu dividiren.

1832	288
1728	$6\frac{104}{288}$
104	

Anstatt zu sagen: wie viel mal ist 2 in 18, würde man sagen: wie oft ist 3 in 18 enthalten, weil der Divisor 288 sich weit mehr 300 als 200 nähert: man findet die Zahl 6, welches der wahre Quotient ist, anstatt daß man auf erstere Art 9 gefunden hätte, und folglich zu drey unnöthigen Versuchen wäre verbunden gewesen.

63.

Mittel, die vorhergehende Methode abzukürzen.

Bloß um die Methode paßlicher zu machen, haben wir vorgeschrieben, das Product des Divisors im Quotienten unter jeden partial Dividendus zu setzen, da aber der Zweck der Arithmetik der seyn, muß die Operationen abzukürzen, so halten wir uns verbunden zu bemerken, daß man diese Producte zu schreiben überhoben seyn, und die Subtraction nach und nach, so wie man jede Ziffer des Divisors multiplicirt hat, verrichten kann. Das sol-

gende Beyspiel wird hinlänglich seyn, zu zeigen, wie diese Subtraction geschiehet.

Beyspiel.

Man will 756984 mit 932 dividiren.

Dividendus	756984	932 Divisor	
1ster Rest	1138	$312\frac{200}{932}$ Quotient.	
2ter Rest	2064		
3ter Rest	200		

Nachdem man die vier ersten Ziffern des Dividendus genommen hat, so findet man, daß 9 in 75, 8 mal enthalten ist. Man schreibt daher 8 in den Quotienten; aber statt das Product von 932 durch 8, unter 7509 zu setzen, multiplicirt man zuerst 2 mit 8, dieses giebt 16; da man aber 16 von 9 nicht abziehen kann, so borgt man von der folgenden Ziffer 6 einen Zehner, addirt dazu 9, giebt 19, und zieht hiervon 16 ab, so bleiben 3 Rest, die man darunter schreibt.

Um den geborgten Zehner in Rechnung zu bringen, behält man diese Einheit, statt die Zahl 6, von welcher geborgt ist, um Eins zu vermindern, und setzt sie zum folgenden Producte. Setzt man die Multiplication fort, so sagt man: 8 mal 3 macht 24, und 1, welche man im Sinn behalten, macht 25; da man 25 nicht von 6 abziehen kann, so borgt man bey der folgenden Ziffer 5 des Dividendus zwey Zehner, die zu 6 gesetzt, 26 geben; hiervon zieht man 25 ab, so bleibt 1, die man unter 6 schreibt Auf diese Art hat man den ersten Zehner, welchen man um 6 hätte vermindern müssen, in Rechnung gebracht, weil man einen Zehner mehr abgezogen hat. Eben so wird man auch die zwey so eben geborgten Zehner in Rechnung bringen. Man fährt also fort, indem man sagt: 8 mal 9 macht 72, und 2, die man geborgt hat, macht 74, diese Zahl von 75 abgezogen, läßt 1.

Zur Seite des Rests 113 rückt man die Ziffer des Dividendus, und fährt auf dieselbe Art fort, indem man sagt: wie viel mal ist 9 in 11 enthalten? 1 mal; al dann 1 mal 2 macht 2, von 8 abgezogen giebt 6; 1 mal 3 macht 3, von 3 abgezogen, bleibt 0; 1 mal 9 macht 9, von 11 abgezogen, bleibt 2. Man

rückt die Ziffer 4 neben den Rest 206, und sagt: wie oft ist 9 in 20 enthalten? 2 mal, nun multiplicirt man, 2 mal 2 macht 4, von 4 abgezogen, bleibt 0; 2 mal 3 ist 6, von 6 abgezogen, bleibt 0; und endlich 2 mal 9 macht 18, von 20 abgezogen, bleibt 2.

Wenn es sich in der Folge bey solcher Rechnung ereignete, daß eine Zahl den Divisor mehr als 9 mal enthielte; so muß man nie den daher entstehenden Quotienten hinsetzen, weil solcher Fall immer einen begangenen Fehler in der unmittelbar vorhergegangenen Division voraussetzt. Denn nimmt man an, daß der Quotient auch nur 10 wäre, so müßte der Zehner desselben als eine Einheit zu dem vorgefundenen Quotienten gerechnet werden.

64.

Endigt der Dividendus und der Divisor mit Nullen, so kann man von beyden so viel Nullen weglassen, als die kleinste Menge der einen Zahl beträgt.

Soll man z. B. 8000 durch 400 dividiren; so dividirt man nur 80 durch 4, weil offenbar 4 Hunderte in 80 Hunderten nicht öfter enthalten sind, als 4 Einheiten in 80 Einheiten.

Von der Division zehntheiliger Zahlen.

65.

Um uns nicht bey überflüßigen Distinctionen aufzuhalten, so wollen wir die Rechnung mit diesen Zahlen in folgende wenige Regeln zusammen fassen.

Man hänge der einen gegebenen Zahl, welche die wenigsten zehntheiligen Stellen hat, so viel Nul-

len an, bis die Menge der zehntheiligen Stellen in beyden gleich wird, weil dadurch (nach 29) der Werth dieser Zahl sich nicht verändert. Sodann lasse man das Komma in beyden Zahlen weg, und verfahre mit ihnen eben so, wie mit ganzen Zahlen; so hat man in dem entstehenden Quotienten nichts zu ändern.

Beyspiel.

Soll man 12,52 durch 4,3 dividiren,
so schreibt man 12,52 | 4,3

Oder indem man die Anzahl der zehntheiligen Stellen in beyden gegebenen Zahlen gleich macht.

12,52 | 4,30

Läßt man das Komma weg; so wird 1252 durch 430 dividirt, und man schreibt also

1252 | 430
860 | $2\frac{392}{430}$
392

und erhält durch die Rechnung 2 zum Quotienten, 392 zum Rest, welches zu erkennen giebt, daß eigentlich $2\frac{392}{430}$ der Quotient sey.

Da man aber beym Gebrauch der zehntheiligen Zahlen bloß die gewöhnlichen Brüche vermeiden will; so muß man, anstatt, wie bisher, den Rest in Gestalt eines Bruchs zu schreiben, die Rechnung, wie im folgenden Beyspiele, weiter hinaus führen.

Beyspiel.

Dividendus	1252	430 Divisor
	860	2,9116 Quotient
1ster Rest	3920	
	3870	
2ter Rest	500	
	430	
3ter Rest	700	
	430	
4ter Rest	2700	

Nachdem man den Quotienten, wie hier 2, in ganzen Zahlen gefunden hat; so setzt man dem Rest 392 eine Null zur Seite, die ihn wirklich 10 mal zu groß macht. Hierauf fährt man fort mit 430 zu dividiren, und findet 9, die zwar in den Quotienten gesetzt wird, da sie aber Zehntheile anzeiget, so setzt man zwischen sie und der 2 ein Komma, und, nach geschehener Multiplication und Abzug, dem Rest 50 eine Null zur Seite; welche Operation eben dieselbe ist, als wenn man dem Dividendus anfänglich 2 Nullen angehängt hätte. Ferner setzt man den hier gefundenen Quotienten 1, der 9 zur Rechten, wodurch sie ihren wahren Werth erhält, indem sie in dieser Stelle bloß Hundertheile anzeigt. Und so fährt man fort, wenn man es für nöthig erachtet. Begnügt man sich aber an 2 Decimalstellen; so hat man sich dem Werthe des wahren Quotienten bis auf ein Hundertheil genähert, und wären es Tausendtheile, bis auf 1 Tausendtheil u. s. w. Denn man darf der letzten Zahl keine Einheit mehr geben oder nehmen, ohne den Quotienten zu groß oder zu klein zu machen. Und so ist es einleuchtend, daß ein jeder Rest der Division in zehntheilige Zahlen verwandelt werden kann.

66.

Nun haben wir noch zu zeigen, daß der wahre Werth des Quotienten nicht verändert werde, wenn man das Komma vom Divisor und Dividendus wegnimmt, und dagegen beyden eine gleiche Menge zehn-

theiliger Stellen giebt; welches in obigem Beyspiele leicht erkannt werden kann. Denn in demselben finden wir, daß der Dividendus 12,52 und der Divisor 4,30 nichts anders als 1252 Hunderttheile und 430 Hunderttheile eben so oft, als 1252 Einheiten, die 430 Einheiten enthalten müssen, so folgt, daß aus beyden Zahlen das Komma weggelassen werden kann, wenn ihnen zuvor eine gleiche Menge Decimalstellen gegeben worden ist.

Die Division anzuzeigen, bedient man sich des Zeichens (:) oder man schreibt den Dividendus oben und den Divisor unten, und trennt beyde Größen durch einen Strich. Also heißt 6 : 2 oder $\frac{6}{2}$, daß 6 durch 2 dividirt werden soll, und der Ausdruck 6 : 2 oder $\frac{6}{2}$ ist = 3.

Abgekürzte Division (Divisio contracta).

I. Im Fall man den Quotienten einer Division nur bis zu einem vorgegebenen Grade genau nöthig hat, so kann man die Rechnung durch folgende Methode abkürzen. Wir nehmen zuerst an, daß man den Quotienten nur bis auf eine Einheit nahe, nöthig hat: dann werden wir zeigen, wie man diese Methode anwenden muß, um den Quotienten so genau als man will, zu haben: die Regel ist folgende.

Man lasse zur Rechten des Dividendus alle Ziffern weniger eine weg, als Ziffern in dieser sind. Nun mache man hintereinander die Division wie gewöhnlich; bleibt kein Rest, so setzt man hinter den Quotienten so viel Nullen, als man im Dividendus Ziffern weggelassen hat. Bleibt aber ein Rest, so fährt man fort zu dividiren, zwar nicht mit dem nehmlichen Divisor als vorher, welches nicht mehr möglich ist, sondern mit dem zur Rechten um eine Ziffer verminderten Divisor. Nach dieser Division dividirt man den neuen Rest, mit dem nächst vorhergehenden Divisor, der vorher wieder zur Rechten um eine Ziffer vermin-

dert seyn muß, uud so fährt man fort zu dividiren, indem man bey jeder Division zur Rechten des Divisors eine Ziffer weniger nimmt.

Beyspiel.

Man verlangt den Quotienten von 8789236487 durch 64423 dividirt, wenigstens bis auf eine Einheit nahe. Man läßt die vier letzten Ziffern zur Rechten des Dividendus weg, und dividirt 878923 durch den vorgegebenen Divisor 64423.

Dividendus (878923 | 64423) ursprünglicher Divisor.

successive Reste	234693	136430) Quotient
	41424 . .	6442
	2772 . .	644 successive
	196 . .	64 Divisoren
	4 . .	6

Man findet zuerst 13 als Quotienten, und 41424 als Rest. Man dividirt also die 41424 mit 6442, indem man die letzte Ziffer 3 des Divisors wegläßt: und findet 6 als Quotienten, die man hinter den ersten Quotienten 13 schreibt, und der Rest ist 2772, den man mit 644 dividirt, indem man wieder eine Ziffer zur Rechten des ursprünglichen Divisors wegläßt. Man findet 4 als Quotienten, der hinter den Hauptquotienten 136 geschrieben wird, der Rest ist 196, den man mit 64 dividirt, indem man wieder eine Ziffer im Divisor wegläßt. Der Quotient ist 3 und der Rest 4. Endlich dividirt man mit 6, und hat 0 zum Quotienten; dergestalt, daß der Quotient von 8789236487 durch 64423 dividirt, 136430 wenigstens bis auf eine Einheit nahe ist. Der genaue Quotient ist wirklich $136430\frac{6527}{64423}$.

Es ist nicht durchaus nöthig, den neuen Divisor, so wie wir es gemacht haben, jedesmal zu schreiben; man kann sich begnügen in dem ursprünglichen Divisor jede Ziffer nach und nach, so wie man zu einer neuen Division übergeht, zu durchstreichen: nur um die Operation empfänglicher zu machen, haben wir diese Divisionen zur Seite der successiven Reste geschrieben.

II. Fände sich der Rest bey der ersten Division kleiner als der um die letzte Ziffer verminderte Divisor, so muß man 0 in den Quotienten setzen; fände sich der Rest wieder kleiner als der

abermals um eine Ziffer verminderte Divisor, so muß man noch eine o in den Quotienten setzen, und so fort.

Beyspiel.

Um den Quotienten von 55106054 durch 643 dividirt, wenigstens bis auf eine Einheit nahe zu haben; dividirt man wie gewöhnlich, den Theil 55106o, welcher nach Weglassung der zwey letzten Ziffern im vorgegebenen Dividendus bleibt.

Dividendus (55106o | 643) ursprünglicher Divisor

	3660 85701)	Quotient
successive Reste	4510 . . 64	successive Divisoren.
	009 . . 6	
	9	
	9	
	3	

Man findet 857 als Quotienten und 9 als Rest; diesen Rest muß man also nur durch 64 dividiren; da 9 diesen Divisor nicht enthält, so setzt man o in den Quotienten; und behält wiederum 9 als Rest, den man nur durch 6 dividirt, dergestalt, daß der gesuchte Quotient 85701 wenigstens bis auf eine Einheit nahe ist.

III. Wenn man aber beym Anfange der Operation zur Rechten des Dividendus, die Ziffern wegläßt, welche die Regel wegzulassen vorschreibt, und es sich findet, daß die bleibenden Ziffern den Divisor nicht enthalten, so läßt man sogleich zur Rechten des Divisors so viel Ziffern weg, als nöthig ist, damit der Divisor darin enthalten sey.

Beyspiel.

Man verlangt wenigstens bis auf eine Einheit nahe den Quotienten von 1611527 durch 64524 dividirt.

Man läßt die vier Ziffern 1527 zur Rechten des Dividendus weg. Da aber die bleibenden Ziffern 161 nicht durch 64524 dividirt werden können, so läßt man die drey letzten Ziffern 524 in diesem Divisor auch weg, damit, dieser

in dem bleibenden Dividendus 161 enthalten sey; man dividirt also 161 durch 64, indem man wie in dem vorhergehenden Beyspiele verfährt.

1 64 Divisor

Dividendus 161 . . 25 Quotient
successive } 33 . . 6) successive Divisor.
Reste } 3

man hat also 25 als Quotienten von 1611527 mit 64524, wenigstens bis auf eine Einheit nahe. Wirklich ist der genaue Quotient $24\frac{6}{6}\frac{2}{4}\frac{0}{5}\frac{5}{2}\frac{1}{4}$, welches weit näher an 25 als an 24 ist.

IV. So wie man nach und nach eine Ziffer im Divisor wegläßt, so muß man, mehrerer Genauigkeit halber, die letzte Ziffer von den bleibenden um eine Einheit vergrößern, wenn die, welche man wegläßt, über oder gleich 5 ist. Man vergrößert eben so die letzte der nach der vorgeschriebenen Weglassung bleibenden Ziffern im Dividendus, um eine Einheit, wenn die weggebliebenen Ziffern entweder 5 oder 50, oder 500 übertreffen; je nachdem daselbst 1, oder 2, oder 3 u. s. w. Ziffern sind.

Beyspiel.

Man will wenigstens bis auf eine Einheit nahe, den Quotienten von 8658627 durch 1987 dividirt haben.

Man dividirt also 8658 durch 1987, wie folgt.

| 1987
8658 | 4357
710 . . 199
113 . . 20
13 . . 2

d. h., anstatt den Rest 710 bloß durch 198 zu dividiren, so dividirt man durch 199, weil die letzte Ziffer 7, welche man wegläßt, größer wie 5 ist. Eben dies gilt für die folgende Division. Da aber der letzte Divisor, welcher in 13, $16\frac{1}{2}$ mal enthalten, etwas zu groß ist, so setzt man 7 in den Quotienten, um zu compensiren.

V. Jetzt ist es leicht, zu sehen, was zu thun sey, wenn man den Quotienten viel genauer haben will. Z. B. man

wollte den Quotienten bis auf ein Zehntausendtheil der Einheit nahe haben, so würde die Frage darauf zurückgeführt, daß man an den Dividendus so viel Nullen (hier vier) setzt, als man im Quotienten Decimalstellen haben will; hierauf macht man die Division nach der bekannten Art. Hat man den Quotienten bis auf eine Einheit nahe gefunden, so trennt man davon zur Rechten durch ein Komma, so viel Ziffern, als man Decimalstellen verlangte.

Beyspiel.

Man verlangt, wenigstens bis auf ein Zehntausendtheil der Einheit nahe, den Quotienten von 6927 durch 4532 dividirt. Man setzt vier Nullen an das Ende von 6927, und die Frage reducirt sich nun darauf, daß man wenigstens bis auf eine Einheit nahe, den Quotienten von 69270000 durch 4532 erhält, d. h. der oben gegebenen Regel gemäß, 69270 durch 4523 zu dividiren, wie folgt:

69270	4532
23950	15285
1290	453
384	45
24	5

der gesuchte Quotient ist also 1,5285 bis auf ein Zehntausendtheil der Einheit nahe.

Wären im Dividendus, oder im Divisor, oder in allen beyden, Decimalstellen, so führt man sie zuerst darauf zurück, daß sie deren keine haben, zufolge dessen, was (§. 68) gesagt ist, dann verfährt man, wie in diesem letzten Beyspiele.

Wenn man also einen vorgegebenen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln wollte, so kömmt man durch diese Methode sehr schnell dazu, indem man auf dasjenige achtet, was (III) gesagt ist.

Will man also $\frac{4253}{9678}$ in einen Decimalbruch verwandeln, und den Werth davon bis auf ein Tausendtheil der Einheit nahe haben, so hat man 4253000 durch 9678 zu dividiren, welches sich (nach I) darauf zurückführt, 4253 durch 9678 zu

dividiren, (III) 4253 durch 968 nach der bekannten Methode zu dividiren. Man findet also 439 für den Werth von $\frac{4253}{968}$ bis auf ein Tausendtheil der Einheit nahe.

VI. Es könnte dessenungeachtet geschehen, daß der nach diesen Regeln gefundene Quotient, um 1, 2 oder 3 Einheiten in der letzten Ziffer falsch wäre. Obgleich dieser Fall sehr selten eintritt, so ist es doch nützlich zu bemerken daß man diesem Fehler leicht vorbeugen kann, indem man, beym Anfange der Operation, zur Rechten des Dividendus, nur so viel Ziffern, weniger zwey, davon nimmt, als deren im Divisor sind, und übrigens wie oben verfährt. Wenn der Quotient gefunden ist, so muß man davon die letzte Ziffer weglassen, indem man beobachtet, zu der letzten Ziffer des bleibenden, eine Einheit zuzusetzen, wenn die weggelassene Ziffer grösser als 5 ist.

Von der Probe der Multiplication und Division.

67.

Um die Probe dieser beyden Rechnungsarten machen zu können, müssen wir die Mittel ergreifen, die uns die über sie gegebenen Erklärungen selbst anbieten.

Wenn es also bey der Multiplication heißt: Man nehme den Multiplicandus so oft, als der Multiplicator die Einheit enthält; so folgt, wenn man nntersucht, wie oft ein Product den Multiplicandus enthalte, d. i., wenn man (nach §. 58) das Product durch den Multiplicandus dividirt, man zum Quotienten den Multiplicator erhalten müsse. Da man nun statt des Multiplicandus den Multiplicator nehmen kann, und umgekehrt; so folgt allgemein, daß ein Product, durch einen von fei-

uen Factoren dividirt, den andern Factor zum Quotienten geben müsse.

Hätte man also z. B. gefunden, daß 2864 mit 6 multiplicirt, die Zahl 17184 (nach §. 50) gäbe, und man dividirte 17184 durch 2864, so müßte man die Zahl 6 zum Quotienerhalten; welches auch wirklich geschiehet.

68.

Auf gleiche Art folgt, weil der Quotient anzeigt, wie oft der Divisor in dem Dividendus enthalten ist, wenn man den Divisor so oft nimmt, als der Quotient anzeigt, d. i., wenn man den Quotienten mit dem Divisor multiplicirt, der Dividendus wieder erhalten werden müsse, so bald die geschehene Division gerade aufgegangen ist. Wäre aber ein Rest geblieben, so muß derselbe dem Producte hinzugesetzt und dadurch der Dividendus wieder erhalten werden.

Da man nun (nach §. 62) gefunden hat, daß 189492 mit 375 dividirt, 505 zum Quotienten und 117 zum Rest giebt; so müssen 375 mit 505 multiplicirt, das Product 189375 geben, und, wenn zu demselben der Rest 117 addirt wird, den Dividendus 189492 wieder hervorbringen.

So kann nun die Multiplication und Division zur gegenseitigen Probe dienen.

Diese Operation kann man aber durch ein viel einfacheres Mittel, welches wir sogleich darlegen werden, prüfen: dessenungeachtet muß man die so eben gemachten Betrachtungen nicht vernachläßigen: sie werden in vielen andern Fällen nützlich seyn.

Probe durch 9.

Gesetzt, man hätte, nachdem 65498 mit 454 multiplicirt wäre, das Product 29736092 gefunden, und wollte prüfen, ob dieses Product richtig sey: man zähle alle Ziffern 6, 5, 4, 9, 8 des Multiplicandus zusammen, als wenn diese nur simple Einheiten enthielten, und ziehe davon 9 ab, so wie sich solche nach und nach in der Summe finden; der hier bleibende Rest ist 5.

Eben so zählt man die Ziffern 4, 5, 4 des Multiplicators zusammen, und zieht ebenfalls 9 davon ab, die diese Addition hervorbringt, so findet sich ein Rest von 4.

Den Rest 5 des Multiplicandus multiplicirt man durch den Rest 4 des Multiplicators, und von dem Product 20 zieht man die 9nen ab, die es enthält; so werden zwey übrig bleiben.

Wenn das Product richtig ist, so muß, wenn man eben so alle Ziffern 2, 9, 7, 3, 6, 0, 9, 2, dieses Products addirt, und alle 9nen abzieht, auch nur 2 übrig bleiben, welches hier in der That statt hat.

Diese Regel gründet sich auf den Grundsatz, daß um den Rest der Subtraktion von allen 9nen, welche eine Zahl enthalten kann, zu haben, darf man nur den Rest suchen, der diese Ziffern, wie simple Einheiten addirt, nach der Auslassung der 9nen, geben wird.

Wenn man demnach von einer durch eine einzige Ziffer mit mehreren Nullen begleitete Zahl, alle 9nen abzieht, so wird der Rest durch diese einzige

Ziffer ausgedrückt seyn. Wenn man von 400 oder von 5000 oder von 60000 alle 9nen abzieht, so ist der Rest 4, oder 5 oder 6 u. s. w., welches leicht einzusehen ist.

Es ist nemlich $100 = 99 + 1$

also $400 = 4.99 + 4$.

Denn da 100 aus den zwey Theilen $99 + 1$ besteht, so müssen 200 jeden dieser Theile 2 mal, 300 jeder dieser Theile 3 mal u. s. w., das heißt, in 400 muß 99, 4 mal und 1,4 mal vorkommen — und dieses letztere drückt man kurz in Zeichen so aus: $400 = 4.99 + 4$. Diese Schlüsse hängen keinesweges von der Zahl 400 ab, und es ist nun leicht, sich zu überzeugen, daß $5000 = 5.999 + 5$: $60000 = 6.9999 + 6$. Nimmt man also von einer solchen Zahl als z. B. 5000 alle darin enthaltene 9nen weg, so bleibt 5 übrig.

Der Rest also, der, nach Wegwerfung der 9nen, eine Zahl wie 65498 (welche dieselbe ist, als 60000 + 5000 + 400 + 90 + 8) geben würde, wird derselbe seyn, als derjenige, der 6 + 5 + 4 + 9 + 8 gäbe, d. h., der nemliche, wenn man die Ziffern, als simple Einheiten enthaltend addirte.

Hier folgt jetzt die Anwendung auf die Probe der Multiplication.

Weil 65498 aus einer gewissen Anzahl von 9nen und einer 5 zusammengesetzt ist, und der Multiplicator 454 auch aus einer gewissen Anzahl von 9nen und aus einem Reste von 4 besteht, so kann es nur um das Product von 5 in 4 oder 20 fehlen, daß

das total Product nicht durch 9 theilbar ist; oder wenn man die 9nen wegnimmt, so muß es nur um 2 fehlen, da das total Product nicht durch 9 theilbar ist. Es muß daher im Producte die nemliche Größe bleiben, als in dem Product der beyden Reste nach Wegwerfung der 9nen, welche es enthält.

Man kann diese Probe auf dieselbe Art auch durch die Zahl 3 machen.

In Betreff der Division ist es sehr leicht, nach dem, was (§. 68) gesagt worden, dieselbe zu prüfen. Nachdem man von dem Dividendus den Rest weggenommen, welcher die Division gegeben hat, so kann man das Resultat als ein Product ansehen, wovon der Divisor und der Quotient die Factoren sind, und folglich kann man die Neunerprobe auf dieselbe Art als vorhin, darauf anwenden.

Genau genommen, ist diese Prüfung nicht unfehlbar, weil, wenn man z. B in der Multiplication, sich um einige Einheiten bey einigen Ziffern des Products irrte, und man zu gleicher Zeit bey einigen andern Ziffern desselben Products einen gleichen aber entgegengesetzten Fehler gemacht hätte, da dieses nichts im Reste ändert, welchen man nach Wegwerfung der 9nen erhielte, so würde diese Regel den Fehler nicht einsehen lassen. Da aber, wie man sieht, wenigstens zwey Fehler seyn müssen, und zwar zwey Fehler, die sich compensiren, oder die nur um ein vielfaches von 9 unterschieden sind, so werden die Fälle, wo diese Prüfung fehlerhaft wäre, in der Ausübung selten. Die Probe mit der Zahl 3 ist zwar eben so, allein da man weit eher um 3 oder um ein 3faches fehlen kann, als um 9 oder ein 9faches, so verdient die Neunerprobe unstreitig vor der Dreyerprobe den Vorzug.

Einige

Einige Anwendungen der vorhergehenden Regeln.

69.

Man bedient sich der Division nicht nur zu bestimmen, wie oft eine Zahl die andere enthält, sondern auch, um eine Zahl in gleiche Theile zu theilen. Daher heißt, die Hälfte, das Drittel, das Viertel, das Zwanzigstel, das Dreyßigstel u. s. w. einer Zahl nehmen, nichts anders, als die Zahl mit 2, 3, 4, 20, 30 u. s. w. dividiren, oder in 2, 3, 4, 20, 30 u. s. w. gleiche Theile theilen, um einen davon zu nehmen.

Unter mehrern Beyspielen, die Anwendung der Division betreffend, wählen wir den Fall, wo man eine *mittlere Größe* zwischen mehrern andern finden will. Gesetzt, man hätte nach gemachten 10 Proben aus einem und demselben Mörser, folgende 10 Schußweiten gefunden:

Schüsse.			Schußweiten.
1	—	—	1231 Toisen
2	—	—	1192
3	—	—	1223
4	—	—	1200
5	—	—	1227
6	—	—	1144
7	—	—	1186
8	—	—	1219
9	—	—	1229
10	—	—	1164
Summe der Schußweiten			12015
mittlere Schußweite			$1201\frac{5}{10}$.

Man versteht unter mittlerer Größe, was jede Größe seyn würde, wenn sie, voraus gesetzt, daß ihr Totalwerth derselbe bleibe, alle gleich wären. Es ist aber klar, daß, wenn sie alle, gleich

wären, man ihre Totalsumme in so viel Theile theilen müsse, als Größen sind, um den Werth einer jeden zu haben. Man muß also hier die Summe 12015 in zehn Theile theilen; d. h., sie durch 10 dividiren; der Quotient $1201\frac{5}{10}$ ist die Größe, oder die mittlere Schußweite, welche man so nennt, weil sie eine gewisse Art von Mitte zwischen allen andern hält.

In der gewöhnlichen Prüfung der Praxis vernachläßigt man den Bruch, wenn sie unter der Hälfte einer Einheit ist; und im Gegentheil, wenn sie größer ist, oder mehr als die Hälfte dieser Einheit gilt, so zählt man eine Einheit mehr.

70.

Die Division dient auch dazu, Einheiten gewisser Art in Einheiten höherer Art zu verwandeln. Z. B. eine Anzahl Lothe in Pfunde, und diese in Centner.

Um also 5864 Loth in Pfunden zu bestimmen, so bemerkt man, daß, weil ein Pfund 32 Loth enthält, auch eben so oft 32 Loth in 5864 Loth enthalten seyn müssen, als Pfunde in dieser Anzahl von Lothen enthalten sind. Mithin muß man diese Lothe durch 32 dividiren; denn erhält man 183 Pfund zum Quotienten und 8 Loth zum Rest. Um ferner die 183 Pfund in Centner zu verwandeln, so dividirt man, weil 110 Pfund einen Centner bestimmen, 183 durch 110, und man wird dann 1 Centner, 73 Pfund, 8 Loth erhalten.

71.

Bey Gelegenheit der Division mit 110 können wir bemerken, daß die Rechnung abgekürzt werden kann, so bald die theilende Zahl mit Nullen endiget. Man trennet nemlich dann sogleich vom Dividendus so viel Stellen als Nullen im Divisor vorhanden sind, und theilet die zur Linken bleibenden

Ziffern des Dividendus durch die bedeutenden Ziffern des Divisors.

72.

Die im vorhergehenden §. gezeigte Division mit 20 wendet man in Frankreich an, wenn man z. B. den zwanzigsten Theil einer vorgegebenen Zahl Livres verlangt, denn dieses reducirt sich darauf, daß man die letzte Ziffer zur Rechten davon trennt, und diese getrennte Ziffer für Sous nimmt die Hälfte der übrigen Ziffern nimmt man für Livres. Wenn bey dieser Hälfte eine Einheit übrig bleibt, so zählt man sie für einen Zehner vom Sou, die man zur Linken der zuerst getrennten Ziffer setzt.

Man verlangt z. B. den zwanzigsten Theil von 54672 Livres. Man trenne die letzte Ziffer 2, und zähle sie für 2 Sous, weil der zwanzigste Theil von 2 Liv., 2 Sous ist; von 5467 Liv. nehme man die Hälfte, welche 2733 Liv. ist; und da 1 übrig bleibt, so hat man 2733 Liv., 12 Sous für den verlangten zwanzigsten Theil: man setzt den übrig bleibenden Zehner zu den Zehnern von Sous, weil der zwanzigste Theil eines Zehner Liv., ein Zehner von Sous ist.

Man kann die Gründe von diesem Verfahren auch so darstellen.

$$54672 \text{ Liv.} = 54660 \text{ Liv.} + 12 \text{ Liv.}$$

also

$$\frac{54672}{20} \text{ Liv.} = \frac{54660}{20} \text{ Liv.} + \frac{12}{20} \text{ Liv.}$$

$$= 2733 \text{ Liv.} + 12 \text{ Sous.}$$

Wenn in der vorgegebenen Summe Sous und Deniers befindlich sind, so vernachläßiget man die Deniers, deren zwanzigster Theil nie einen Denier betragen kann. Was die Sous be-

trift, so triplirt man sie, nimmt davon den 5ten Theil und nimmt diesen für Deniers. Hiernach ist also der zwanzigste Theil von 54672 Liv., 17 Sous, 7 Deniers, gleich 2733 Liv. 12 Sous 10 Deniers.

Wenn man den zehnten Theil verlangt, so nimmt man alle Ziffern, ausgenommen die letzte zur Rechten, für so viel Livres: hierauf verdoppelt man diese letzte Ziffer, und nimmt dieses doppelte für Sous, weil der zehnte Theil eines Livres 2 Sous gilt.

Oft ist es nöthig, für jeden Liv. einer vorgegebenen Summe, 4 Deniers zu rechnen: dieses kömmt darauf hinaus, davon den zwanzigsten Theil, wie oben gezeigt worden, zu rechnen: hierauf den dritten Theil von diesem zwanzigsten Theil. Um die vier Deniers für jeden Liv. von 8762 Liv. zu haben, nimmt man den zwanzigsten Theil; dieser ist 438 Liv., 2 Sous, wovon der dritte Theil 146 Liv., 0 Sous, 8 Deniers die gesuchte Zahl ist. Wirklich sind die vier Deniers für einen Liv. nichts anders als der sechzigste Theil, weil 4 Deniers 60 mal in dem Liv. enthalten sind; und der sechzigste Theil ist der dritte Theil vom zwanzigsten.

Bleibt dann noch ein Rest, so hängt man demselben die zuvor abgeschnittenen Ziffern wieder an, wodurch alsdann der ganze Rest bestimmt wird.

Z. B. 5834 sollte durch 20 dividirt werden, so trennt man die Ziffer 4, und dividirt durch 2 den Theil 583, wodurch man 291 zum Quotienten und 1 zum Rest erhält; zu welchem die getrennte Ziffer 4 gesetzt, den Rest 14 giebt, und man folglich zum Quotienten $291\frac{14}{20}$ erhalten wird.

Diese Abkürzung kann bey der Reduction der Belastung eines Schiffs mit Gewichtstonnen angewendet werden. Weiß man, daß die Belastung 2584954 Pfund beträgt, und man will sie in Tonnen reduciren, so muß man mit 2000 dividiren; diese Division geschiehet nun, indem man die drey letzten Ziffern zur Rechten davon trennt, und von den übrigen die Hälfte nimmt, auf diese Art erhält man 1292 Tonnen und 954 Pfund.

Von den Brüchen.

73.

Brüche, arithmetisch betrachtet, sind Zahlen, die jede Größe ausdrücken, welche kleiner als die Einheit ist.

74.

Um einen deutlichen Begriff von den Brüchen zu erhalten, muß man sich vorstellen, daß jede als Einheit angenommene Größe, aus einer bestimmten Menge gleicher Theile oder kleinerer Einheiten zusammen gesetzt sey. So z. E. nimmt man an, daß 1 Thaler aus 24 Theilen oder kleinern Einheiten, die Groschen genannt werden, zusammen gesetzt ist.

Ein oder mehrere Theile bestimmen eine Größe, die man einen Bruch der Einheit nennt, welchen Namen man auch denjenigen Zahlen giebt, die dergleichen Theile vorstellen.

75.

Man hat angenommen, einen Bruch auf zweyerley Art durch Zahlen auszudrücken. Die erste Art bestehet darin, daß man die Theile der Einheit mit einer ganzen Zahl, welche die erforderliche Menge enthält, ausdrückt, und ihnen einen besondern Namen giebt.

So würde man, um 7 Theile eines Thalers auszudrücken, von welchen ein jeder 24 enthält, die Ziffer 7 gebrauchen, derselben den Namen Groschen beylegen, und diesen Ausdruck durch 7 Groschen vorstellen; welche Bezeichnungsart der Theil einer Einheit bey komplexen Zahlen, von denen wir künftig noch sprechen werden, statt findet.

76.

Da man aber für jede mögliche Theilung der Einheit ein besonderes Zeichen haben müßte, so wird die hieraus entstehende Menge der Zeichen dadurch vermieden, daß man jeden Bruch mit 2 Zahlen vorstellet, die unter einander gesetzt und durch einen Strich getrennt werden.

Um also obige 7 Theile vorzustellen, würden wir $\frac{7}{24}$ setzen, von welchem Bruch, wie bey jedem andern, die untere Zahl anzeigt, in wie viel Theile die Einheit getheilet ist, und die obere, wie viel dergleichen Theile genommen worden sind.

Um einen Bruch mit Worten auszudrücken, spricht man die obere Zahl, (welche der Zähler heißt) zuerst aus, und hernach die untere (welche der Nenner heißt), der zur Endigung die Sylbe tel beygefüget wird.

So nennt man sieben zwanzigstel den Bruch $\frac{7}{20}$ und vier fünftel den Bruch $\frac{4}{5}$, unter welchem Ausdruck vier fünftel wir vier Theile verstehen, deren fünfe die Einheit bestimmen.

Uebrigens müssen wir bemerken, daß von der allgemeinen Benennung der Brüche bloß der Bruch $\frac{1}{2}$ eine Ausnahme macht; denn ihn spricht man entweder die Hälfte oder ein Halbes statt ein Zweytel aus.

77.

Der Zähler zeigt also an, wie viel Theile der Einheit die durch den Bruch vorgestellte Größe erhält, und hingegen der Nenner, welchen Werth diese Theile haben, weil er zu erkennen giebt, wie viel dergleichen Theile die Einheit erfordert. Man

giebt ihm auch mit Recht den Namen Nenner, weil nach ihm der Bruch benannt wird, wie dieses z. B. die beyden $\frac{3}{5}$ und $\frac{2}{7}$ zeigen, von welchen die Theile des ersten Fünftel und die des letzten Siebentel heißen.

78.

Auch werden der Zähler und Nenner oft die beyden Glieder des Bruchs genannt.

Von den ganzen Zahlen, in so fern sie unter der Gestalt eines Bruchs vorgestellt werden.

79.

Oft entstehen bey der Rechnung mit Brüchen solche Brüche, deren Zähler entweder dem Nenner gleich, oder noch größer sind; wie z. B. $\frac{8}{8}$, $\frac{27}{5}$ und so weiter.

Diese können nun nicht, wie eigentliche Brüche betrachtet werden, sondern vielmehr als Größen, die aus ganzen Zahlen mit Brüchen bestehen.

Um aber die in dergleichen Größen enthaltenen ganzen Zahlen zu finden, muß man den Zähler durch den Nenner theilen, wodurch dann der Quotient die ganze Zahl, und der Rest den Zähler des mit der ganzen Zahl verbundenen Bruchs giebt.

So werden $\frac{27}{5}$ offenbar $5\frac{2}{5}$, d. i. fünf ganze Einheiten und zwey Fünftel geben.

Da man auch wirklich in dem Ausdruck $^{27}/_{5}$, durch den Nenner 5 angezeigt findet, daß jede Einheit aus 5 Theilen bestimmt werden muß, so folgt, daß, so oft 27 die 5 enthält, eben so oft der Werth des Bruchs $^{27}/_{5}$ die Einheit enthalten müsse.

80.

Hingegen macht es die Multiplication und Division mit Brüchen nothwendig, daß, wenn bey den Brüchen ganze Zahlen befindlich sind, man diese in Brüche verwandle, weil dadurch die Rechnung erleichtert wird.

Um nun dergleichen Verwandlung zu erhalten, darf man bloß die ganze Zahl mit dem Nenner des Bruchs, in welchen man sie verwandelt haben will, multipliciren.

So erhält man z. B. 8 in Fünftel verwandelt, wenn man 8 mit 5 multiplicirt, woraus sich $^{40}/_{5}$ ergeben. Denn man betrachtet hier eine jede Einheit der 8, als eine aus 5 Theilen zusammen gesetzte Größe; demnach auch offenbar 8 Einheiten 40 Theile geben müssen. Eben so müssen $7\frac{4}{9}$ in Neuntel verwandelt $^{67}/_{9}$ geben.

Von den Veränderungen, die mit den Gliedern eines Bruchs ohne Nachtheil desselben vorgenommen werden können.

81.

Es ist offenbar, daß, wenn die Einheit in mehrere Theile getheilet wird, auch deren mehrere erfordert werden, um eine und dieselbe Größe aus ihnen zusammen zu setzen.

Man kann demnach den Nenner eines Bruchs ohne dessen Nachtheil 2, 3, 4 u. s. w. mal größer machen, so bald man auch den Zähler 2, 3, 4 größer macht. Daher man ganz allgemein annimmt: der Werth eines Bruchs wird nicht verändert, wenn dessen beyde Glieder mit einerley Zahl multiplicirt werden.

Also ist $\frac{3}{4}$ so viel als $\frac{6}{8}$, $\frac{1}{2}$ so viel als $\frac{2}{4}$ und so viel als $\frac{5}{10}$, und so weiter.

82.

Ferner schließen wir, daß, je kleiner die Menge der Theile einer Einheit gemacht wird, auch desto weniger von ihnen erfordert werden, um daraus eine und dieselbe Größe zusammen zu setzen. Man kann daher ohne Nachtheil des Bruchs den Nenner, 2, 3, 4 u. s. w. mal kleiner machen, so bald auch der Zähler 2, 3, 4 mal kleiner gemacht wird, woraus wieder allgemein folgt: daß der Werth eines Bruchs nicht verändert wird, wenn man dessen beyde Glieder durch einerley Zahl dividirt.

Um die Wahrheit dieser beyden Sätze recht deutlich einzusehen, darf man sich nur erinnern, was unter dem Zähler und dem Nenner eines Bruchs verstanden wird.

Wenn man z. B. den Nenner eines Bruchs durch 4 multiplicirt, so zeigt dieser alsdann an, daß die Einheit in 4 mal mehr Theile getheilt ist, die also 4 mal kleiner sind; soll also der Werth des Bruchs nicht verändert werden, so muß man 4 mal

mehr Theile nehmen; dieses letztere geschiehet nun, wenn man den Zähler, der anzeigt, wie viel man Theile nimmt, mit 4 multiplicirt. Demnach muß man bemerken, daß wenn die beyden Glieder eines Bruchs mit einerley Zahl multiplicirt oder dividirt werden, der Bruch dadurch nicht multiplicirt oder dividirt werde, indem sein Werth, wie wir eben gesehen haben, durch dergleichen Behandlung nicht verändert wird.

Auf diese beyden hinreichend dargethanen Sätze sind nun die folgenden Verwandlungen der Brüche, die sehr oft angewendet werden müssen, gegründet.

Brüche auf gleiche Benennung zu bringen.

83.

Um zwey Brüche auf gleiche Benennung zu bringen, multiplicirt man die beyden Glieder des ersten Bruchs mit dem Nenner des andern, und die beyden Glieder des andern mit dem Nenner des ersten Bruchs.

Sollen z. B. die beyden Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ auf gleiche Benennung gebracht werden; so multiplicirt man 2 und 3, als die Glieder des ersten Bruchs, mit 4, dem Nenner des andern: dann erhält man den Bruch $\frac{8}{12}$, der mit dem gegebenen Bruch $\frac{2}{3}$ (nach §. 81) gleichen Werth hat.

Multiplicirt man nun noch 3 und 4, als die Glieder des zweyten Bruchs, mit 3, dem Nenner des ersten; so erhält man $\frac{9}{12}$, ein Bruch, der mit $\frac{3}{4}$ gleichen Werth hat. Wir haben also wirklich beyde Brüche $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ in die ihnen gleiche Brüche $\frac{8}{12}$ und $\frac{9}{12}$, die einen gleichen Nenner haben, verwandelt.

Daß aber nach diesem Verfahren ein gleicher Nenner für beyde Brüche erfolgen müsse, ist leicht einzusehen, weil derselbe bloß ein Product von dem Nenner der ersten Brüche ist.

84.

Sind aber mehrere Brüche auf gleiche Benennung zu bringen; so multiplicirt man die beyden Glieder eines jeden durch das Product der Nenner der andern Brüche.

Um also die 4 Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$ auf gleiche Benennung zu bringen, multiplicire man 2 und 3, als die Glieder des ersten Bruchs, mit 140, als dem Product der Nenner, 4, 5, und 7 der andern Brüche; so erhält man $\frac{280}{420}$, welcher Bruch (nach §. 81) mit $\frac{2}{3}$ gleichen Werth hat.

Eben so multiplicirt man die beyden Glieder 3 und 4 des zweyten Bruchs mit 105, als dem Product der Nenner 3, 5 und 7, wo man dann $\frac{315}{420}$ erhält, welcher Bruch mit $\frac{3}{4}$ gleichen Werth hat.

Gehet man nun zum dritten Bruch über, und multiplicirt seine beyden Glieder 4 und 5 mit 84, als dem Product der Nenner 4, 3, 7, so erhält man $\frac{336}{420}$ statt $\frac{4}{5}$.

Multiplicirt man endlich die 5 und 7 des vierten Bruchs mit 60, als dem Product der Nenner 3, 4, 5 der 3 ersten Brüche; so erhält man $\frac{300}{420}$ statt $\frac{5}{7}$.

Auf diese Art siehet man, daß die 4 Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{4}{5}$, $\frac{5}{7}$ in die folgenden $\frac{280}{420}$, $\frac{315}{420}$, $\frac{336}{420}$, $\frac{300}{420}$ verwandelt worden sind. Diese Brüche sind zwar nicht so einfach, als jene, haben aber doch gleichen Werth mit ihnen, und sind ihres gemeinschaftlichen Nenners wegen der Addition und Subtraction fähig.

Wir können hier nicht unbemerkt lassen, daß, da der Nenner eines jeden neuen Bruchs eigentlich nichts anders als ein Product aus allen gegebenen

Nennern ist; jedem neuen Bruche ein und eben derselbe Nenner zu Theil werden mußte.

85.

Findet sich indessen, daß die Nenner der gegebenen Brüche entweder einen gemeinschaftlichen Divisor haben, oder daß einer von ihnen ein Vielfaches der andern ist; so kann die vorige Regel dahin verändert werden, daß die gleiche Benennung der Brüche weit einfacher ausfallen muß.

Man wähle nehmlich die möglichst kleinste Zahl, die alle Nenner genau enthält zum gemeinschaftlichen Nenner. Um aber den Zähler eines jeden neuen Bruchs zu erhalten, der diesem Nenner entspricht, theilt man mit seinem Nenner in diese Zahl, und multiplicirt den entstehenden Quotienten mit dem Zähler; das Product ist dann der verlangte Zähler.

Sollten demnach die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{7}{12}$ auf gleiche Benennung gebracht werden; so nehme man zum gemeinschaftlichen Nenner 24, als die kleinste Zahl, in der alle Nenner 3, 4, 6, 8, 12 dieser Brüche enthalten sind, wie folgende unter ihnen stehende Zahlen anzeigen:

$\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$	$\frac{5}{6}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{7}{12}$
8	6	4	3	2.

Multiplicirt man nun mit demselben sowohl Zähler, als Nenner der über ihnen stehenden Brüche; so erhält man folgende neue Brüche:

$\frac{16}{24}$ $\frac{18}{24}$ $\frac{20}{24}$ $\frac{9}{24}$ $\frac{14}{24}$,

welche eine gleiche Benennung und die möglich einfachsten Zahlen haben.

Diesen möglich kleinsten Nenner aber zu erhalten, setze man die Nenner der gegebenen Brüche alle in eine Reihe, und untersuche,

ob von demselben nicht einige durch eine von den Zahlen 2, 3, 5, 7, 11 u. s. w. (welche weiter keinen Factor als sich selbst und die Einheit enthalten und deshalb Primzahlen genannt werden) zu dividiren sind. Geschiehet dieses, so schreibt man die daher entstehenden Quotienten nebst den undividirten Nennern in eine zweyte Reihe, und untersucht wiederum, ob in derselben nicht einige Zahlen durch eine von den Primzahlen dividirt werden können. Sodann formire man aus den daher entstehenden Quotienten und den undividirten Zahlen der zweyten Reihe eine dritte Reihe. Auf diese Art fahre man fort, bis sich nicht mehr zwey, einen gemeinschaftlichen Divisor enthaltende Zahl in einer Reihe befinden. Nun multiplicire man das Product der in der letzten Reihe unzudividirenden Zahlen mit dem Product von allen den zuvor angewandten Divisoren, dann ist das daher entstehende Product der möglich kleinste gemeinschafliche Nenner der gegebenen Brüche.

Wenn z. B. die Brüche $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, $\frac{5}{6}$, $\frac{3}{7}$, $\frac{7}{12}$ auf gleiche Benennung gebracht werden sollen, so schreibe man die Nenner 3, 4, 6, 7, 12 in eine Reihe und dividire 4, 6 und 12 durch 2, dann erhält man zur zweyten Reihe die Quotienten 2, 3, 6, und die undividirten Nenner 3 und 7. Von dieser Reihe sind nun wiederum 2 und 6 durch 2 theilbar. deshalb formire man von den Quotienten 1, 3 und den undividirten Zahlen 3, 3, 7 eine dritte Reihe. In dieser Reihe sind aber 3, 3 und 3 zu theilen; es geben also die Quotienten 1, 1, 1 und die undividirten Zahlen 1

und 7 die vierte Reihe. Da nun in derselben nicht mehr 2 Zahlen durch eine gleiche Zahl dividirt werden können, so multiplicire man das Product 7 der letzten Reihe mit denen zuvor angewandten Divisoren 2, 2, 3, dann ist das Product 84 der möglich kleinste gemeinschaftliche Nenner.

Den Grund, auf welchem diese Regel beruhet, einzusehen, zerfälle man 2 Zahlen, die mit einander multiplicirt werden sollen, z. B. 6 und 8 in ihre einfachsten Factoren, so erhält man 2.3 für 6 und 2. 2. 2 für 8, und das ganze Product kann 2. 3. 2. 2. 2 geschrieben werden. Wir sehen aber aus dieser Zerfällung, daß der Factor 2 sowohl in 6 als in 8 befindlich ist, und mithin daß, wenn derselbe aus der Zerfällung von 6 oder von 8 weggelassen wird, doch noch von den übriggebliebenen Factoren 2, 3, 2, 2 sowohl 6 als 8 zu formiren sind. Folglich müssen auch in dem Producte dieser Factoren 2. 3. 2. 2 sowohl 6 als 8 enthalten seyn.

Es kömmt also bey Bestimmung des möglich kleinsten allgemeinen Nenners von gegebenen Brüchen bloß darauf an, daß, wenn einige ihrer Nenner eine Primzahl zum gemeinschaftlichen Factor haben, man denselben bloß in einem Nenner lasse, aus einem jeden der andern aber einmal wegschaffe, welches durch die vorhergehende Regel geschiehet.

Brüche auf die kleinste Benennung zu bringen.

86.

Je kleiner die Zahlen der Glieder eines Bruchs sind, desto einfacher ist derselbe. Da es nun oft nö-

thig ist, einen Bruch ohne Nachtheil desselben durch kleinere Zahlen auszudrücken, wenn man dessen Zähler und Nenner (nach §. 81) mit einerley Zahl dividirt, so muß man solches nie unterlassen. Wie diese Division aber geschiehet, zeiget folgendes.

83.

Man dividirt erst Zähler und Nenner mit 2, so oft es sich thun lassen will. Ferner dividirt man mit 3, so oft es angeht. Man verfährt successive mit den Zahlen 5, 7, 11, 13, 17 u. s. w. eben so, d. h. mit den Zahlen, die keinen andern Divisor haben, als sich selbst oder die Einheit, und die man Primzahlen nennt (nach §. 85).

Es ist daher die einzige Schwierigkeit, zu wissen, wenn man mit 2, 3, 5 u. s. w. dividiren könne. Sie zu heben, dienen folgende Sätze:

a) Jede mit einer Null oder mit einer geraden Ziffer endigende Zahl läßt sich durch 2 dividiren.

Eine Zahl kann nemlich keine andere Endziffern in der niedrigsten Stelle haben, als entweder 0, oder 1, oder 2, oder 3, oder 4, oder 5, oder 6, oder 7, oder 8, oder 9; diese geben aber mit 2 multiplicirt, Zahlen mit folgenden Endziffern: 0, 4, 6, 8. Alle Zahlen, die solche Endziffern haben, lassen sich also als ein Product in 2 ansehen, und daher sind diese Zahlen, d. h., die geraden Zahlen alle durch 2 theilbar.

b) Wenn man alle Ziffern einer Zahl summirt, und findet, daß die Summe derselben ein Vielfaches von 3 ist, so ist die Zahl selbst durch 3 theilbar.

So z. B. muß es die Zahl 54321 seyn, weil 15 die Summe der Ziffern 5, 4, 3, 2, 1 und das 5fache von 3 ist.

c) Eben so verhält es sich mit der Zahl 9, wenn die Summe aller Ziffern einer Zahl 9 oder ein Vielfaches von 9 beträgt.

Diese Eigenschaft der Zahl 3 wird beynahe eben so wie für die Zahl 9 bewiesen; und beyde Eigenschaften beweißt man wie bey der Neunerprobe (§. 68) geschehen ist.

d) Endigt sich eine Zahl mit der Ziffer 5 oder 0, so ist sie durch 5 theilbar. Denn alle Producte der Zahl 5 in einer der folgenden Zahlen 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 und 9 giebt ein Product, dessen Endziffer vielmehr 0 oder 5 ist. Da nun jede Zahl sich mit einer von jenen Zahlen endigen muß, so folgt, daß jede mit 0 oder mit 5 sich endigende Zahl als ein Product in 5 angesehen werden kann, Daher eine solche Zahl auch durch 5 theilbar seyn muß.

Man könnte eben so leicht für die Zahl 7 und andere Zahlen ähnliche Regeln finden. Da sie aber Operationen vorschreiben, welche eben so viel Zeit als die Division erfordern, so ist es besser, diese zu versuchen.

Die vorhergehenden Regeln anzuwenden, wollen wir z. B. den Bruch $\frac{2016}{5798}$ auf seinen einfachsten Ausdruck bringen. Bey selbigem bemerken wir nun, daß beyde Glieder mit geraden Ziffern endigen; mithin können wir sie durch 2 theilen, und erhalten folglich den Bruch $\frac{1008}{2899}$, dessen Glieder wiederum mit 2 getheilet $\frac{504}{1449}$ bestimmen.

Erinnern wir uns dessen, was oben gesagt ist, so können wir diesen Bruch durch 3 in $\frac{168}{483}$, und diesen nochmals durch 3 in $\frac{56}{161}$, und wenn man endlich mit 7 versucht, abermals in $\frac{8}{23}$,

als

als den einfachsten Ausdruck des gegebenen Bruchs verwandeln.

Es ist hier vorgeschrieben, die Division nur mit den Primzahlen 2, 3, 5, 7 u. s. w. zu versuchen, denn nachdem man z. B. mit 2 die Division erschöpft hat, so ist es unnütz, die Division mit 4 zu versuchen; denn wenn letztere sich verrichten ließe, so hätte um so mehr die Division mit 2 noch geschehen können. Eben so wird man sich leicht überzeugen, daß eine Zahl, die so oft es angieng, mit 2 und 3 dividirt ist, nicht mehr mit 6 dividirt werden kann u. s. w.

88.

Am leichtesten bringt man einen Bruch auf seinen einfachsten Ausdruck, wenn man beyde Glieder durch ihren größten gemeinschaftlichen Divisor dividirt. Dieser wird nach folgender Regel gefunden.

Man dividire das größere Glied durch das kleinere; bleibt kein Rest, so ist das kleinere Glied der größte gemeinschaftliche Divisor. Findet man aber einen Rest, so dividirt man durch denselben das kleinere Glied. Gehet die Division auf, so ist dieser erste Rest der größte gemeinschaftliche Divisor.

Bliebe aber nach dieser zweyten Division ein Rest; so dividire man den ersten Rest durch den zweyten, und fahre so

fort, den vorhergehenden Rest durch den letzten zu dividiren, bis die Division genau aufgehet. Man kann dann den als Divisor gebrauchten letzten Rest für den größten gemeinschaftlichen Divisor der beyden Glieder des Bruchs annehmen. Findet man aber zum letzten Divisor die Einheit, so schließt man hieraus, daß der gegebene Bruch nicht einfacher zu machen sey.

Soll also z. B. der Bruch $\frac{3760}{9024}$ einen einfachen Ausdruck erhalten, so wird 9024 durch 3760 dividirt, wodurch man 1 zum Quotienten und 1504 zum Rest erhält. Mit diesem Rest theilet man in 3760 und erhält wiederum 2 zum Quotienten, aber 752 zum Rest, mit welchem endlich auch der erste Rest 1504 getheilet wird. Da nun die Division aufgeht; so schließt man, daß die beyden Glieder des Bruchs $\frac{3760}{9024}$ genau durch 752 dividirt werden können, und findet, wenn dieses wirklich geschiehet, $\frac{5}{12}$ für den einfachsten Ausdruck des gegebenen Bruchs.

Daß nun 752 der größte gemeinschaftliche Divisor der beyden Glieder des gegebenen Bruchs seyn müsse, kann man folgendergestalt erweisen. Jeder gemeinschaftliche Divisor beyder Glieder 9024 und 3760 muß auch den nach obiger Division gebliebenen Rest 1504 theilen können. Eben so

muß der gemeinschaftliche Divisor der beyden Zahlen 3760 und 1504 auch deren Rest theilen können. Da nun 752 in 1504 genau aufgehet, 3760 aber nichts anders ist, als 2.1504 + 752, so muß 752 der größte gemeinschaftliche Divisor der beyden Zahlen 3760 und 1504 seyn. Ferner ist 9024 nichts anders, als 2.3760 + 1504, folglich muß 725 auch der größte gemeinschaftliche Divisor der beyden Zahlen 9024 und 3760 seyn.

Verschiedene Arten, einen Bruch zu betrachten, nebst den aus diesen Betrachtungen zu ziehenden Folgen.

89.

Dem bisher gegebenen Begriff von einem Bruche zufolge, zeiget der Nenner an, in wie viel Theile die Einheit getheilet worden ist, und der Zähler, wie viel solcher Theile genommen werden sollen.

Man kann aber einen Bruch noch aus einem andern Gesichtspunkt betrachten, nemlich, man kann den Zähler als eine Größe, die in so viel Theile getheilet werden soll, als der Nenner Einheiten hat, ansehen.

Bey $\frac{4}{5}$ z. B. kann man die 4 als 4 Thaler, 4 Groschen, oder 4 Metzen u. dgl. betrachten, welche in 5 Theile getheilet werden sollen. Es ist aber offenbar, daß es einerley ist; man theilet 4 Thaler in 5 Theile und nimmt einen dieser Theile, oder man theilet einen Thaler in 5 Theile und nimmt 4 derselben.

90.

Demnach stellt der Zähler eines Bruchs den Dividendus und der Nenner den Divisor vor; woraus nun erhellet, was der Rest einer Division unter der obigen Gestalt (§. 60) sagen will.

Aus allen dem läßt sich folgern:

91.

1) Daß man jederzeit einer ganzen Zahl die Gestalt eines Bruchs geben könne, wenn man nur die ganze Zahl zum Zähler annimmt und ihr die Einheit zum Nenner giebt. Folglich ist 8 oder $\frac{8}{1}$, 5 oder $\frac{5}{1}$ eben dasselbe.

92.

2) Daß, um einen Bruch in einen Decimalbruch zu verwandeln, man nur den Zähler wie den Rest einer Division, wobey der Nenner den Divisor vorgestellt hat, ansehn, und sodann (nach §. 65) verfahren müsse. Man unterlasse aber nicht, die Stelle der Ganzen des Quotienten mit einer Null zu bemerken.

Demnach werden $\frac{4}{5}$ durch die zehntheilige Zahl 0, 8; $\frac{5}{9}$ durch 0, 555 und $\frac{1}{25}$ durch 0, 04 bestimmt u. s. f.

Von der Addition der Brüche.

93.

Haben die Brüche alle gleiche Benennung, so addire man blos die Zähler, und gebe der Summe den gemeinschaftlichen Nenner.

Wenn also $\frac{2}{7}$, $\frac{3}{7}$ und $\frac{5}{7}$ addirt werden sollen, so darf man nur die Zähler 2, 3 und 5 addiren, wodurch $\frac{10}{7}$ oder (nach §. 80) $1\frac{3}{7}$ entstehen.

94.

Haben die Brüche nicht gleiche Benennung, so bringe man sie (nach §. 83 und folgenden) darauf und addire sodann die neuen Brüche nach der vorgeschriebenen Regel.

Werden also die Brüche $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{5}$ zu addiren gegeben; so bringe man sie auf gleiche Benennung, wodurch sie in $\frac{45}{60}$, $\frac{40}{60}$, $\frac{48}{60}$ verwandelt werden. Ihre Summe wird dann $\frac{133}{60}$ oder $2\frac{13}{60}$ seyn.

Von der Subtraction der Brüche.

95.

Wenn beyde Brüche gleiche Benennung haben, so ziehe man den Zähler des einen von dem Zähler des andern ab und gebe dem Rest den gemeinschaftlichen Nenner der beyden Brüche.

Sollen also $\frac{5}{9}$ von $\frac{8}{9}$ abgezogen werden; so muß der Rest $\frac{3}{9}$ oder $\frac{1}{3}$ seyn (§. 87).

Sollten aber $4\frac{7}{8}$ von $9\frac{5}{8}$ abgezogen werden, so siehet man leicht, daß $\frac{7}{8}$ von $\frac{5}{8}$ nicht abzuziehen sind. Mithin muß man sich bey der 9 eine Einheit borgen, welche aus $\frac{8}{8}$ bestehet. Nun addire man diese zu den $\frac{5}{8}$, wodurch $\frac{13}{8}$ entstehen, ziehe von demselben $\frac{7}{8}$ ab, so bleiben $\frac{6}{8}$. Ferner subtrahire man 4 von der nach dem Borgen übrig gebliebenen 8, so bleibt zum Rest $4\frac{6}{8}$. oder $4\frac{3}{4}$.

9.

Haben die Brüche nicht gleiche Benennung, so bringe man sie (nach 83 und folgende) darauf, uud

verrichte sodann die Subtraction nach der vorhergehenden Regel.

Soll also $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ abgezogen werden, so verwandle man diese Brüche in $\frac{9}{12}$ und $\frac{8}{12}$, und ziehe 8 von 9 ab, so bleibt $1\frac{1}{12}$.

Von der Multiplication der Brüche.

87.

Einen Bruch mit einem andern zu multipliciren, muß man den Zähler des einen mit dem Zähler des andern, und den Nenner des einen mit dem Nenner des andern multipliciren.

Soll z. B. $\frac{4}{5}$ mit $\frac{2}{3}$ multiplicirt werden, so thue man dieses mit 2 und 4, wodurch 8 zum Zähler, und hierauf 3 mit 5, wodurch 15 zum Nenner, und folglich $\frac{8}{15}$ zum Produkt entstehet.

Damit man die Ursache dieser Regel einsehe, so erinnere man sich, daß multipliciren nichts anders heißt, als, man soll den multiplicandus so oft nehmen, als der Multiplicator die Einheit enthält. Soll man also $\frac{2}{3}$ mit $\frac{4}{5}$ multiplicirtn, so ist offenbar, daß $\frac{2}{3}$ viermal genommen, $\frac{8}{3}$ geben müssen. Da aber hier der Factor 4. fünfmal größer als $\frac{4}{5}$ ist, so ist auch das Product $\frac{8}{3}$ fünfmal größer, als das verlangte seyn soll. Demnach muß das Product $\frac{8}{3}$ fünfmal kleiner gemacht werden. Der Werth eines Bruchs wird aber offenbar um so viel verkleinert, als sein Nenner größer gemacht wird. Denn in je mehr Theile die Einheit getheilet wird, je kleiner müssen diese Theile werden. Deshalb muß der Nenner 3 des Bruchs $\frac{8}{3}$ fünfmal größer und also der Bruch selbst in $\frac{8}{15}$ verwandelt werden; wobey wir aber sehen,

daß von den beiden Factoren $\frac{2}{3}$ und $\frac{4}{5}$ Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt worden ist.

98.

Soll eine ganze Zahl mit einem Bruch, oder ein Bruch mit einer ganzen Zahl multiplicirt werden: so gebe man der ganzen Zahl die Gestalt eines Bruchs und die Einheit zu seinem Nenner.

So z. B. wenn 9 mit $\frac{5}{7}$ multiplicirt werden soll, so multiplicire man $\frac{9}{1}$ mit $\frac{5}{7}$ nach der vorhergehenden Regel; dann entstehet $\frac{45}{7}$ oder $6\frac{3}{7}$ zum Product.

99.

Befinden sich in einem von den beyden Factoren oder in allen beyden, Ganze und Brüche, so muß die ganze Zahl in einen Bruch von derselben Art, wie der ihr zugehörige Bruch ist, verwandelt und hernach multiplicirt werden.

Soll z. B. $12\frac{3}{5}$ mit $9\frac{3}{4}$ multiplicirt werden; so verwandle man den Multiplicandus in $\frac{63}{5}$ und den Multiplicator in $\frac{39}{4}$, sodann multiplicire man $\frac{63}{5}$ mit $\frac{39}{4}$ (nach §. 97), so erhält man $\frac{2457}{20}$ oder $122\frac{17}{20}$ zum Product.

100.

Man könnte dieselbe Operation auch so machen, daß man die Ganzen und den Bruch des Multiplicandus durch die Ganzen des Multiplicators; nachher durch den Bruch des Multiplicators, multiplicirt, wie folget.

$12\frac{3}{5}$
$9\frac{3}{4}$

Product von 12 in 9	108
von $\frac{2}{5}$ in 9	$5\frac{2}{5}$ oder $\frac{8}{20}$
von 12 in $\frac{3}{4}$	9
von $\frac{3}{5}$ in $\frac{3}{4}$	$\frac{3}{20}$ oder $\frac{9}{20}$
	$122\frac{17}{20}$

Aber diese Art zu operiren, ist im allgemeinen weniger einfach als die erste.

101.

Einen Bruch durch einen andern zu dividiren, muß man die beyden Glieder des Divisors umkehren und sodann den Bruch des Dividendus mit diesem also umgekehrten Bruch multipliciren.

Soll z. B. $\frac{2}{3}$ durch $\frac{4}{5}$ dividirt werden; so kehre man den Bruch $\frac{4}{5}$ um, wodurch $\frac{5}{4}$ entstehen, und nun multiplicire man (nach §. 96) $\frac{2}{3}$ mit $\frac{5}{4}$, dann entstehet $\frac{10}{12}$ oder $\frac{5}{6}$ zum Quotienten.

Um die Ursache dieser Regel einzusehen, bemerke man, daß, wenn $\frac{2}{3}$ durch $\frac{4}{5}$ dividirt werden sollen, nichts anders verlangt wird, als, man soll untersuchen, wie oft $\frac{4}{5}$ in $\frac{2}{3}$ enthalten ist. Da aber der Divisor aus Fünftel besteht, so muß er 5 mal öfter im Dividendus enthalten seyn, als wenn er aus 4 Ganzen bestünde; folglich muß man durch 4 dividiren und mit 5 multipliciren, das heißt, mit $\frac{5}{4}$, also mit dem umgekehrten Divisor multipliciren.

102.

Soll mau einen Bruch durch eine ganze Zahl, oder eine ganze Zahl durch einen Bruch dividiren,

so verwandle man die ganze Zahl zuvor in einen Bruch, welcher die Einheit zum Nenner hat.

Wenn z. B. 12 durch $\frac{5}{7}$ dividirt werden soll, so dividire man $\frac{12}{1}$ durch $\frac{5}{7}$, oder multiplicire nach der vorhergehenden Regel $\frac{12}{1}$ mit $\frac{7}{5}$, wodurch sodann $\frac{84}{5}$ oder $16\frac{4}{5}$ entsteht.

103.

Sollten sich aber Ganze und Brüche im Divisor und Dividendus befinden, so müssen die Ganzen in Brüche von derselben Art, als der ihnen zugehörige Bruch enthält; verwandelt werden.

Soll z. B. $54\frac{3}{5}$ durch $12\frac{2}{3}$ dividirt werden; so verwandle man den Dividendus in $\frac{273}{5}$ und den Divisor in $\frac{38}{3}$, und dividire sodann $\frac{273}{5}$ durch $\frac{38}{3}$, oder multiplicire $\frac{273}{5}$ mit $\frac{3}{38}$, so erhält man $\frac{819}{190}$ oder $4\frac{59}{190}$ zum Quotienten.

Einige Anwendungen der vorhergehenden Regeln.

104.

Aus dem vorhergehenden (§. 89 und folg.) ist es nunmehro leicht, den Werth eines Bruchs zu bestimmen.

Will man z. B. wissen, wie viel $\frac{5}{7}$ von einem Thaler beträgt; so ist bekannt, daß $\frac{5}{7}$ von einem Thaler eben so viel ausmachen, als der siebente Theil von 5 Thaler. Demnach verwandle man die 5 Thlr. in Groschen, so entstehen 120 Groschen dividire diese durch 7, dann erhält man 17 zum Quotienten und 1 Groschen zum Rest. Diesen Rest verwandelt man in Pfennige, wodurch 12 Pfennige entstehen: diese dividirt man wiederum durch 7, dann erhält man $1\frac{5}{7}$ Pfennig. Folglich ist $\frac{5}{7}$ von einem Thaler durch 17 Groschen 1 und $\frac{5}{7}$ Pfennige bestimmt.

Verlangt man aber $\frac{5}{7}$ von 24 Thalern zu bestimmen, so siehet man leicht, daß eben so wie zuvor $\frac{5}{7}$ von einem Thaler bestimmt, und hierauf das Resultat mit 24 multiplicirt werden muß. Indessen gelangt man weit bequemer zum Zweck, wenn man $\frac{5}{7}$ sogleich mit 24 multiplicirt, wodurch (nach §. 98) $\frac{120}{7}$ Thaler entstehen; und wenn sodann der Werth dieses Bruchs bestimmt wird, wodurch man 17 Thaler, 3 Groschen $5\frac{1}{7}$ Pfennig enthalt.

101.

Wir haben schon oben (Seite 68) erwähnt, daß man in Frankreich öfters nöthig hat zu wissen, wie viel 4 Deniers, oder 6 Deniers für den Liv. einer vorgegebenen Summe ausmacht.

Für die 4 Liv.: Man trennt die letzte Ziffer von der Zahl der Liv. der vorgegebenen Summe, und nimmt den sechsten Theil der andern, den man als Liv. rechnet. Wenn ein Rest bleibt, so setzt man ihn zu den getrennten Ziffern und nimmt davon $\frac{1}{3}$, welches die Sous und Deniers giebt.

Wenn in der vorgegebenen Summe Sous vorhanden sind, so nimmt man davon den fünften Theil, den man für Deniers nimmt.

Beyspiel.

Man verlangt die 4 Deniers für den Liv. von

der Summe : : :	3433 Liv.	10 S.	0 D.
der sechste Theil von 343 ist :	57	—	—
Es bleibt 1, welche als Zehner zu der getrennten Ziffer 3 gesetzt, 13 giebt, davon ist der dritte Theil :	—	4	4
Endlich der fünfte Theil von 10 Sous, als Deniers angesehen, ist	—	—	2
	57	4	6

Die Ursache dieses Verfahrens gründet sich darauf, daß die 4 Liv. für einen Liv., ein $\frac{4}{240}$ oder $\frac{1}{60}$ des Liv. ausmachen. Man muß also durch 60 dividiren; welches (§. 71) sich auf unsere Vorschrift reducirt. Den Rest anbelangend, so muß man

ihn durch die Multiplication mit 20 in Sous verwandeln, und nachher mit 60 dividiren, welches mit dem dritten Theil nehmen einerley ist. Eben so sieht man, daß für den 60sten Theil der Sous der vorgegebenen Summe, man diese Sous durch die Multiplication mit 12 zu Deniers machen und dann mit 60 dividiren muß, welches darauf hinaus läuft, mit $\frac{12}{60}$ oder $\frac{1}{5}$ zu multipliciren, d. h. $\frac{1}{5}$ nehmen; wären auch Deniers in der gegebenen Summe, so läßt man solche weg, weil der sechzigste Theil dieser Deniers keinen Denier gäbe.

Um die 6 Deniers für die Liv. zu nehmen, so sieht man, wenn man eben so raisonnirt, daß man die letzte Ziffer der Liv. trennen muß, von den andern Deniers nimmt man den vierten Theil, den man für Liv. zählt, nachher setzt man den Rest zu der getrennten Ziffer und nimmt davon die Hälfte, welche die Sous und Deniers giebt.

Wenn in der vorgegebenen Summe Sous sind, so nimmt man davon $\frac{3}{10}$, die man für Deniers zählt.

Die Deniers der vorgegebenen Summe läßt man ganz weg.

Beyspiel.

Man verlangt die 6 Den. für den Liv.

von der Summe	1387 Liv.	13 S.	4 D.
der vierte Theil von 138 ist	34	—	—
Es bleiben 2 übrig, die zu der getrennten Ziffer 7 gesetzt, 27 machen, davon ist die Hälfte	—	13	6
Die $\frac{3}{10}$ der 13 Sous, als Deniers gezählt, sind	—	—	$3\frac{9}{10}$
Total-Summe	34	13	10

106.

Hingegen sind die Decimalbrüche, da sie keine Nenner haben, um desto leichter zu bestimmen.

Wenn z. B. zu erfahren verlangt wird, wie viel 0,36 Quadratruthen Morgen betragen; so multiplicire man, (da der Magdeburger Morgen zur Ausmessung der Forsten angenommen worden ist, und dieser 180 Quadratruthen enthält) 0,36 Mor-

gen mit 180, wodurch 64,80 Quadratruthen erhalten werden. Sollte man aber wissen wollen, wie viel 0,53 Fuß, oder 5 Zoll 3 Linien zehntheiliges Maaß (wovon eine Ruthe 10 Fuß, ein Fuß 10 Zoll u. s. w. hat) im zwölftheiligen Maaß, wovon eine Ruthe 12 Fuß, ein Fuß 12 Zoll u. s. w. hat) betragen; so multiplicire man die 0,53 Fuß, um sie in zwölftheilige Zollen zu bestimmen, mit 12, dann erhält mau 6,36 Zoll. Eben so multiplicire man diese 0,36 Zoll, um sie in zwölftheiligen Linien zu bestimmen, mit 12, welches 4,32 Linien, das heißt, 4 Linien und 0,32 Linien giebt. Also ist der Werth der zehntheiligen 0,53 Fuß, durch 6 Zoll 4,32 Linien im zwölftheiligen Maaß bestimmt.

107.

Will man aber umgekehrt bey einer komplexen Zahl die Unterabtheilungen in zehntheilige Zahlen der Haupteinheiten verwandeln; so muß man nach und nach mit den Zahlen dividiren, welche anzeigen, wie viel Einheiten der zu theilenden Zahl, eine Einheit der nächst höhern Art bestimmen, und zwar muß man damit allemal bey der niedrigsten Gattung anfangen.

Will man demnach in dem vorhergehenden Beyspiel die 6 Zoll, 4 Linien und 0,32 Linien wiederum in zehntheilige Zahlen eines Fußes verwandeln, so dividire man 4,32 Linien durch 12, wodurch 0,36 Zoll entstehen; daß also die gegebene Zahl in 6,36 Zoll verwvndelt ist. Ferner dividire man 6,36 Zoll durch 12, welches 0,53 Fuß giebt. Demnach ist nun die gegebene komplexe Zahl in 0,53 Fuß verwandelt.

Von den gebrochenen Brüchen.

108.

Die vorhergehende Bestimmung der Brüche giebt uns nun die Veranlassung, von den gebro-

chenen Brüchen zu handeln. Dieses sind hinter einander folgende, durch das Wort von sich trennende Brüche.

Z. B. $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$, $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{7}$ u. s. w., sind Brüche von Brüchen, Man bestimmt sie aber durch einen einzigen Bruch, wenn man zuerst ihre Zähler und hierauf ihre Nenner mit einander multiplicirt; daß also der Bruch $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ in $\frac{6}{12}$ oder in $\frac{1}{2}$, und der Bruch $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{6}$ in $\frac{30}{72}$ oder $\frac{5}{12}$ verwandelt wird.

Denn man siehet leicht ein, daß, wenn $\frac{3}{4}$ von $\frac{2}{3}$ genommen werden sollen, man nichts anders verlangt, als $\frac{2}{3}$ sollen in 4 Theile getheilet und 3 davon genommen werden, welches aber eben so viel ist, als wenn $\frac{2}{3}$ mit $\frac{3}{4}$ mulliplicirt werden sollen. Gleichergestalt verhält es sich, wenn $\frac{2}{3}$ von $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{6}$ genommen werden sollen; denn $\frac{2}{3}$ und $\frac{3}{4}$ sind $\frac{6}{12}$ mithin $\frac{2}{8}$ von $\frac{3}{4}$ von $\frac{5}{6}$ gleich $\frac{6}{12}$ von $\frac{5}{6}$, die folglich $\frac{30}{12}$ oder $\frac{5}{12}$ gleich sind.

Wollte man aber wissen, wie viel $\frac{3}{4}$ von $5\frac{3}{8}$ ausmachen, so verwandelt man die 5 Ganze in Achtel, und bestimmt sodann $\frac{3}{4}$ von $\frac{43}{8}$, welches $\frac{129}{32}$ oder $4\frac{1}{32}$ beträgt.

Um ein Beyspiel von gebrochenen Brüchen zu geben, wollen wir aunehmen: Ein Gutsherr habe 3756 Morgen Waldung und er verkaufte von denselben $\frac{1}{3}$. Nach einiger Zeit ließe der Eigenthümer dieses Drittels von demselben einem andern $\frac{4}{5}$ ab. Und von diesen $\frac{4}{5}$ werden wiederum $\frac{3}{4}$ verkauft. Endlich lasse der letzte Käufer $\frac{5}{9}$ von diesen $\frac{3}{4}$ ausruden und zu Acker machen. Es fragt sich nun, wie viel derselbe an Acker erhalten hat? Antwort: 417 Morgen, 60 Quadratruthen, denn $\frac{5}{6}$ von $\frac{3}{4}$ von $\frac{4}{5}$

von $\frac{1}{3} = \frac{60}{540} = \frac{1}{9}$ und $\frac{1}{9}$ von 3756 Morgen = 417 Morgen 60 Quadratruthen.

Uebrigens ist es nicht allemal nothwendig, einen gebrochenen Bruch in einen einzigen Bruch zu verwandeln. Oefters berechnet man den Werth eines gebrochenen Bruchs, wenn man ihm unter seiner Gestalt läßt, leichter, als wenn man ihn reducirt, wie folgendes Beyspiel zeigt.

Bey den Feldstücken ist der Vorsprung der Scheibe auf dem Mittelstücke*), welche dasselbe mit dem Schildzapfen verbindet, $\frac{1}{12} + \frac{1}{2}$ von $\frac{1}{12}$ des Diameters der Kugel; will man nun den ganzen Werth dieses Vorsprungs bey einem 12pfünder wissen, wo der Diameter der Kugel 4 Zoll, 4 Linien, 9 Scrupel ist, so verfahre man wie folgt:

$\frac{1}{12}$ des Diameters der Kugel	4 Lin.	$4\frac{3}{4}$ Scrupel
die Hälfte des $\frac{5}{12}$ oder $\frac{1}{2}$ des $\frac{1}{12}$	2	$2\frac{3}{8}$
also ist der Vorsprung	6	$7\frac{1}{8}$

Es mag hier noch ein Beyspiel stehen, welches verschiedene der gegebenen Regeln enthält.

Gesetzt man wollte ein Schiff von $140\frac{2}{3}$ Fuß lang bauen, so daß die Entfernungen zwischen den Schießlöchern (Sabords) (den Raum zwischen dem ersten Schießloche und dem Einschnitte in das von dem Kiele in die Höhe gehende gekrümmte Holz (la rablure de l'étrave), und den Raum zwischen dem letzten Schießloche und dem Einschnitte in das Holz an dem Hintertheile eines Schiffes, woran das Steuerruder hängt (la rablure de l'étambot) mit gerechnet) $108\frac{3}{4}$ Fuß machen. Man fragt, ob man in der ersten Batterie eines jeden Bords 12 Schießlöcher machen kann.

Von $140\frac{2}{3}$ Fuß ziehe man $108\frac{3}{4}$ Fuß ab (§. 95 u. folg.), so bleiben $31\frac{11}{12}$ Fuß für die Schießlöcher. Dividirt man $31\frac{11}{12}$ mit 12, d. h., $\frac{383}{12}$ mit $\frac{12}{1}$ (§. 80 u. §. 102), so ist der Quotient $\frac{383}{1144}$ Fuß $= 2\frac{95}{144}$ Fuß

$=$ 2 Fuß, 7 Zoll, 11 Linien.

*) la saillie de l'embaze sur le renfort en avant et joignant le tourillon.

d. h., beynahe 2 Fuß, 8 Zoll, welches ein angemeffenes Maaß für ein Schiff von $140\frac{2}{3}$ Fuß ist.

Von den continuirlichen Brüchen.

I. Wenn ein durch etwas beträchtliche Zahlen ausgedrückter Bruch nicht durch die (§. 83) gegebene Methode zu verkleinern ist, und man sich mit einem nahen Werthe begnügen kann, so gelangt man dazu durch die folgende Methode, die wechselsweise größere und kleinere Brüche, als der vorgegebene Bruch ist, giebt, aber immerfort näher, dergestalt, daß man bey der letzten Operation den vorgegebenen Bruch wieder erhält. Als Beyspiel wollen wir den Bruch $\frac{100006}{314159}$ nehmen, der, wie man in der Geometrie sehen wird, das Verhältniß des Durchmessers eines Kreises zu seinem Umfange sehr nahe ausdrückt. Diesen Bruch wollen wir nun durch andere, zwar nicht so scharfe, aber durch kleinere Zahlen ausgedrückte Brüche ausdrücken.

Man dividire den Zähler und Nenner durch den Zähler, so hat man

$$\cfrac{1}{3+\frac{14159}{100000}}$$

Um einen Näherungswerth zu haben, so lasse man den bey 3 stehenden Bruch weg, so hat man $\frac{1}{3}$ als ersten Näherungswerth, aber ein wenig zu groß.

Um einen weit nähernden Werth zu haben, so dividire man den Zähler und den Nenner des Bruchs, der neben 3 steht, jeden durch den Zähler dieses Bruchs, und man wird haben:

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\frac{887}{14259}}}$$

Man lasse den bey 7 stehenden Bruch weg, und man hat $\frac{1}{3+\frac{1}{7}}$, oder (§. 80) $\frac{1}{\frac{22}{7}}$ oder (§. 101) $\frac{7}{22}$ als zweyter Werth, welcher näher als der erste ist, aber ein wenig zu klein.

Um einen noch nähern Werth zu haben, so dividire man den Zähler und Nenner des bey 7 stehenden Bruchs, jeden durch den Zähler dieses Bruchs, so hat man

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\frac{8}{8}\frac{5}{8}\frac{4}{7}}}}$$

Läßt man den bey 15 stehenden Bruch weg, so hat man

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\frac{1}{15}}} = \frac{1}{3}\frac{0}{3}\frac{6}{3}$$ ein näherer Werth, aber ein wenig zu groß.

Um einen noch nähern Werth zu haben, so dividire man die zwey Glieder des bey 15 stehenden Bruchs jedes mit den Zähler 854, und man wird haben

$$\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{7+\cfrac{1}{15+\cfrac{1}{1+\frac{3}{8}\frac{3}{5}\frac{3}{4}}}}}$$

Läßt man den Bruch $\frac{3}{8}\frac{3}{5}\frac{3}{4}$ weg, so hat man einen weit nähern Werth $\frac{1}{3}\frac{1}{5}\frac{3}{5}$, der aber ein wenig zu klein ist. Man sieht jetzt, wie man weiter fortfahren kann.

Eben so findet man

$$\frac{2}{1}\frac{1}{1}\frac{6}{7} = \cfrac{1}{5+\frac{6}{2}\frac{7}{1}\frac{}{6}} = \cfrac{1}{5+\cfrac{3}{3+\frac{1}{5}}} = \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\frac{7}{1}\frac{}{5}}}}$$

$$= \cfrac{1}{5+\cfrac{1}{3+\cfrac{1}{4+\cfrac{1}{2+\frac{1}{7}}}}}$$

der letzte Bruch $\frac{1}{7}$ kann nicht weiter aufgelöst werden.

Es folgt nun, daß $\frac{216}{1147}$ etwas kleiner als $\frac{1}{5}$,
und etwas größer als $\frac{1}{5+\frac{1}{5}} = \frac{5}{26}$;
und wieder etwas kleiner als $\frac{1}{5+\frac{1}{3+\frac{1}{4}}} = \frac{1}{5+\frac{4}{13}} = \frac{13}{69}$;
und eben so etwas größer als $\frac{29}{154}$ sey;
so daß immer der Unterschied des angenommenen Werthes vom wahren Werthe geringer wird, bis endlich der ganze continuirliche Bruch, fractionem continuam, (Kettenbruch, Stuffenbruch), dem Bruche $\frac{216}{1147}$ gleich ist.

II(Aus (§. 108) erhellet überhaupt, wie man die reinen Brüche, welche dem wahren Werthe des vorgegebenen stuffenweise näher kommen, aus der Auflösung finden könne.

Die bequemste Art, dieses mit einem Blicke zu übersehen ist folgende.

Erstlich dividirt man mit dem Reste immer wieder den vorhergehenden Theiler wie (§. 88)

216)	1147	5		5. erster Quotient
	1080			
erster Rest	67	216		3. zweyter Quotient
		201		
zweyter Rest	15	67		4. dritter Quotient
		60		
dritter Rest	7	15		2. vierter Quotient
		14		
vierter Rest	1	7		7. fünfter Quotient
		7		
fünfter Rest	0			

Hieraus erhält man folgende Figur.

1147	Quotienten	Zähler	Nenner
		1	0 zu groß
216	5	0	1 zu klein
67	3	1	5 zu groß
15	4	3	16 zu klein
7	2	13	69 zu groß
1	7	29	154 zu klein
		216	1147 genau.

Bayerische Staatsbibliothek München

In der ersten Columne stehen hier die Reste, oder Divisoren, in der zweyten, die mittelst jener als Divisoren gefundenen Quotienten. In die dritte schreibt man 1, 0 und in die vierte 0, 1 unter einander, die übrigen Zahlen der beyden letzten Columnen erhält man, indem man jede Zahlen derselben mit den gegenüberstehenden Quotienten der zweyten Columne multiplicirt, und zu dem Producte die nächst vorhergehende Zahl in den beyden letzten Columnen addirt. Den allgemeinen Beweis dieses Verfahrens wird man in der Algebra finden.

III. Läßt sich wirklich ein Bruch durch kleinere Zahlen genau ausdrücken; so erhält man durch dieses Verfahren nicht nur am Ende wie (§. 88) den kleinsten genauen Ausdruck, sondern auch alle noch kleinere Ausdrücke, die dem wahren Werthe des Bruchs stufenweise näher kommen. Z. B. $\frac{89}{301}$ ist kleiner als 1, näher bey $\frac{1}{2}$; noch näher bey $\frac{2}{3}$; noch näher bey $\frac{5}{8}$ und gleich $\frac{27}{43}$.

Denn

301				1	0
189	1	:	:	0	1
112	1	:	:	1	1
77	1	:	:	1	2
35	2	:	:	2	3
7	5	:	:	5	8
				27	43

Zur Uebung mögen folgende Beyspiele dienen.

IV. Das Sonnenjahr ist 365 Tage, 5 Stunden, 48 Minuten, 55 Secunden oder $365\frac{20235}{86400}$ Tage lang. Dieser Bruch giebt durch die hier gelehrte Annäherungsmethode die Brüche

$$\frac{1}{4}, \frac{7}{29}, \frac{8}{33}, \frac{55}{227}, \frac{63}{260}, \frac{181}{747}, \frac{787}{3248}, \frac{1755}{7243},$$

welcher letztere anzeigt, weil er dem vorgegebenen gleich ist, daß der Ueberrest über 365 Tage in 7243 Jahren genau 1755 Tage ausmachen würden. Der julianische Calender legte den Bruch $\frac{1}{4}$ zum Grunde, und schaltete daher alle 4 Jahre einen Tag ein; die folgenden sind aber stufenweise genauer; und da $\frac{181}{747}$ beynahe gleich $\frac{97}{400}$ ist, so sieht man, daß das gregorianische Jahr viel genauer ist, welches unter 4 Secularjahren, die einen Schalttag nach julianischer Weise bekämen, ihn bey dreyen wegläßt.

Bayerische Staatsbibliothek München

Der Mond geht in 27 Tagen, 7 Stunden, 43 Minuten, 5 Secunden, 2 Tertien, $58\frac{1}{2}$ Quarten, d. i. in 27,321 58632 Tagen durch den Thierkreis.

Daher

27,321 58633				I		0
1,00000000	27	;		0		I
321 58632	3	;		I		27
3524104	9	;		3		82
441696	7	;		28		765
432232	I	;		199		5437
9464	45	;		227		6202

Unter den gefundenen Brüchen ist $\frac{765}{28}$, welcher bedeutet, daß der Mond in 765 Tagen etwa 28 Umläufe mache, nur um $13\frac{3}{5}$ Secunden zu klein. Hingegen fehlt $\frac{6202}{227}$ nur um $1\frac{2}{3}$ Tertien. Indessen würde eine Uhr schon sehr gut den Mondlauf zeigen, die in 765 Tagen 28 mal den Mond durch den Thierkreis führte; nur in 5 Monathen würde man sie eine Minute nachrücken dürfen.

V. Noch ist zu bemerken, daß zwey zunächst auf einander folgende Werthe, welche man nach der vorgeschriebenen Methode erhält, immer um einen Bruch unterschieden sind, dessen Zähler 1 und dessen Nenner das Product beyder Nenner ist. Aber der Unterschied der successiven Werthe vom gegebenen Bruch, ist jedesmal ein Bruch, dessen Zähler durch die gegenüberstehenden Divisoren (im Schema) in der ersten Columne bestimmt wird, und dessen Nenner das Product aus dem Nenner des gegebenen Bruchs, und dem Nenner des jedesmaligen successiven Werthes ist.

Z. B. der Bruch $\frac{216}{1147}$ gab die Brüche

$$\frac{1}{5}, \frac{3}{16}, \frac{13}{69}, \frac{29}{154}, \frac{216}{1147}$$

Und es ist

$$\frac{1}{5} - \frac{3}{16} = \frac{1}{5.16}$$

$$\frac{13}{69} - \frac{3}{16} = \frac{1}{16.69}$$

$$\frac{13}{69} - \frac{29}{154} = \frac{1}{69.154}$$

$$\frac{216}{1147} - \frac{29}{154} = \frac{1}{154.1147}$$

Da der vorgegebene Bruch immer zwischen zweyen zunächst auf einander folgenden Brüchen liegen muß, so sieht man daraus, daß der Fehler, den man begeht, wenn man einen der Brüche statt den vorgegebenen nimmt, immer kleiner ist, als ein Bruch, dessen Zähler 1 und dessen Nenner ein Product der beyden Nenner ist, die zu den beyden Brüchen gehören, zwischen welche der vorgegebene Bruch fällt.

Wenn man also $\frac{29}{154}$ nimmt, so ist $\frac{29}{154}$ zwar etwas zu klein, aber der Fehler beträgt noch nicht $\frac{1}{154.1147}$

Nimmt man $\frac{29}{154}$, so ist dieser Bruch noch nicht um $\frac{1}{69.154}$ zu groß.

Ferner ist

$$\frac{1}{5} - \frac{216}{1147} = \frac{67}{5.1147}$$

$$\frac{216}{1147} - \frac{3}{16} = \frac{15}{16.1147}$$

$$\frac{13}{69} - \frac{216}{1147} = \frac{7}{69.1147}$$

und $$\frac{216}{1147} - \frac{69}{153} = \frac{1}{154.1147}$$

Man wird aus den hier beygebrachten Beyspielen sich von dem vielfachen Nutzen einer so leichten Rechnung, als die Verwandlung der Brüche ist, überzeugen. — Wir werden Gelegenheit nehmen, künftig mehr davon zu geben.

Noch einige Beyspiele in Brüchen.

VI. Ehe wir zur Rechnung mit complexen Zahlen übergehen, wollen wir noch einige Beyspiele in Brüchen geben, und zugleich die bequemste äußere Form der Rechnung zeigen. Uebrigens ist Uebung in Brüchen unerlaßlich.

Wie viel Centner Pulver hat man empfangen, als man für die Artillerie $60\frac{3}{4}$ Centner, für die Infanterie $113\frac{1}{2}$ Centner und für die Cavallerie $19\frac{3}{8}$ Centner zur Manövrezeit überließ?

	8	
$60\frac{3}{4}$	2	6
$113\frac{1}{2}$	4	4
$19\frac{3}{8}$	1	3
Summa $193\frac{1}{4}$ Cent.	$\frac{13}{8}$ =	$1\frac{5}{8}$

Man setzt nemlich die zu addirenden Zahlen mit ihren Brüchen gehörig unter einander; in den kleinsten gemeinschaftlichen Nenner (hier 8), den man oberwärts etwas zur Seite der zu addirenden Zahlen schreibt, dividirt man mit jeden Nenner der gegebenen Brüche und schreibt die Quotienten neben die zu ihnen gehörigen Brüche, wie die zweyte Columne zeigt; man multiplicirt ferner diese Quotienten mit den Zähler der zu ihnen gehörigen Brüche, nnd erhält solchergestalt die dritte Columne, welche addirt, den Zähler eines Bruchs giebt, dessen Nenner der Generalnenner ist. Sind in dieser Summe noch Ganze enthalten, so zählt man sie zu den schon Vorhandenen, wie die oben stehende Rechnung deutlich zeigt.

$$\frac{2}{5} + \frac{3}{4} + \frac{5}{6} = 1\frac{59}{60}$$

$$\frac{5}{8} + \frac{3}{4} + \frac{7}{16} = 1\frac{13}{16}$$

$$\frac{19}{4} + \frac{79}{12} + \frac{26}{3} = 20$$

$$0{,}56 + \frac{3}{4} + \frac{5}{8} = 0{,}56 + 0{,}25 + 0{,}625 = 1{,}935$$

$$0{,}045 + \frac{2}{3} + \frac{3}{5} = 1{,}3116\ldots$$

$$50\frac{3}{4}\ 26\frac{5}{7} = 77\frac{13}{28}$$

Eine Festung A. hat $3465\frac{3}{4}$ Centner Pulver empfangen, und dafür 398 Thlr. $7\frac{2}{3}$ Gr. Fracht bezahlen müssen. Eine andere B. hat ihr aber $1942\frac{5}{8}$ Centner mit Vergütigung von 227 Thlr. $8\frac{3}{4}$ Gr. Frachtlohn abgenommen; man fragt: wieviel Pulver die erstere behalten, und wie viel Frachtkosten sie davon gehabt?

Die Festung A. empfieng $3465\frac{3}{4}$ Ct. für 398 Thlr. $7\frac{2}{3}$ Gr. Fr. K.
— — B. nahm ab $1942\frac{5}{8}$ ″ ″ 227 ″ $8\frac{3}{4}$ ″ ″ ″

mithin blieben ersterer $1523\frac{1}{8}$ Ct. für 170 Thlr. $22\frac{11}{12}$ Gr. Fr. K.

Wir schließen nemlich: da $\frac{3}{4}$ Gr. $= \frac{9}{12}$ Gr. und $\frac{2}{3}$ Gr. $= \frac{8}{12}$ Gr., jene aber von diesen nicht abgezogen werden können, so müssen wir 1 Gr. $= \frac{12}{12}$ Gr. von den 7 Gr. entlehnen, mithin sind $\frac{12}{12}$ Gr. $+ \frac{8}{12}$ Gr. $= \frac{20}{12}$ Gr. und $\frac{20}{12}$ Gr. $- \frac{9}{12}$ Gr. $= \frac{11}{12}$ Gr. u. s. w.

Ferner, da $\frac{3}{4}$ Ct. $= \frac{6}{8}$ Ct. so ist $\frac{6}{8}$ Ct. $- \frac{5}{8}$ Ct. $= \frac{1}{8}$ Ct. u. s. w.

$\frac{5}{6} - \frac{3}{4} = \frac{1}{12}$; $\frac{7}{4} - \frac{18}{8} = \frac{19}{52}$; $\frac{14}{3} - \frac{6}{5} = 3\frac{7}{15}$; $\frac{3}{7} - 0{,}37 = 0{,}25 - 0{,}37 = 0{,}38$; $64 - \frac{7}{9} = 63\frac{9}{9} - \frac{7}{9} = 63\frac{2}{9}$; $50 - \frac{15}{16} = 49\frac{1}{16}$.

In Campagne werden auf jeden Mann täglich $2\frac{1}{2}$ Pf. Brod und $\frac{3}{4}$ Pf. Fleisch gereicht, man fragt: wieviel Brod und Fleisch eine Compagnie von 200 Mann jeden Tag empfangen müsse? wir setzen so weil 200 Mann offenbar 200 mal so viel als 1 Mann erhalten).

$2\frac{1}{2}$ Pfund Brod und $\frac{3}{4}$ Pfund Fleisch
mit 200 multiplicirt

giebt 500 Pfund Brod und 150 Pfund Fleisch, welches die Compagnie empfängt.

$$\frac{14}{30} \cdot \frac{48}{52} = \frac{1}{2}; \quad \frac{9}{24} \cdot \frac{12}{18} = 0{,}3$$

$$\frac{14}{3} \cdot \frac{15}{8} = \frac{35}{4} = 8\frac{3}{4}$$

$$\frac{4}{8} \cdot \frac{21}{12} \cdot \frac{20}{15} \cdot \frac{9}{8} = 2{,}1.$$

$$765 \cdot \frac{3}{7} = \frac{2295}{7} = 327\frac{6}{7}.$$

$$1248 \cdot \frac{5}{4} = 312 \cdot 5 = 1560.$$

$$4736 \cdot \frac{7}{8} = 592 \cdot 7 = 4144.$$

$$334 \cdot \frac{25}{100} = 334 \cdot \frac{1}{4} = 83\frac{1}{2}$$

$$215 \cdot \frac{375}{1000} = 215 \cdot \frac{3}{8} = 26{,}875 \cdot 3 = 80{,}525.$$

$$625 \cdot \frac{75}{1000} = 625 \cdot \frac{3}{4} = 156{,}25 \cdot 3 = 468{,}75$$

Hier bieten sich verschiedene Vortheile dar, die man nicht übersehen muß.

456 . 875 ist = 456000 . 0,875
= 456000 . $\frac{7}{8}$ = 57000 : 7 = 399000;

$2250 \cdot 75 = 225000 \cdot 0{,}75$
$= 225000 \cdot \frac{3}{4} = 56250 \cdot 3 = 168750;$

$375 \cdot 0{,}000625 = 0{,}375 \cdot 0{,}625$
$= \frac{3}{8} \cdot \frac{5}{8} = \frac{1{,}875\,00}{8} = 0{,}234375.$

$5\frac{3}{7} \cdot 27\frac{3}{5} = \frac{38}{7} \cdot \frac{137}{5} = \frac{5209}{35} = 148\frac{29}{35}$

$4\frac{3}{4} \cdot 7 = 28\frac{21}{4} = 33\frac{1}{4}.$

$16\frac{6}{8} \cdot 4 = 67.$

Bey einer Armee beträgt die tägliche Ration der Artilleriepferde 24 Wispel, 7 Scheffel 1 Viertel, $1\frac{1}{3}$ Metze Gerste, wenn auf jedes Pferd $2\frac{1}{3}$ Metze gutgethan wird; man fragt: wie viel gedachter Pferde befinden sich bey der Armee?

Weil offenbar so viele Pferde da seyn müssen, als $2\frac{1}{3}$ Metze in 24 Wispel, 7 Scheffel, 1 Viertel, $1\frac{1}{3}$ Metzen enthalten sind, und 1 Wisp. = 24 Sch., 1 Sch. = 4 Viert., 1 Viertel = 4 Metz. ist, so setzen wir erst, um die Menge Metzen zu erhalten,

$$\left((24 \cdot 24 + 7)4 + 1\right)4 + 1\tfrac{1}{3}$$
$$= (483 \cdot 4 + 1)\,4 + 1\tfrac{1}{3}$$
$$= 2333 + 4 + 1\tfrac{1}{3}$$
$$= 9333\tfrac{1}{3} \text{ Metze}$$

Nun ist $9333\frac{1}{3} : 2\frac{1}{3} = \frac{28000}{3} : \frac{7}{3} = \frac{28000}{7} = 4000;$
mithin sind bey der Armee 4000 Artilleriepferde.

$$\frac{3}{8} : \frac{4}{12} = \frac{3}{8} \cdot \frac{\overset{3}{12}}{4} = 1\tfrac{1}{8}.$$

$$\frac{16}{3} : \frac{16}{27} = \frac{16}{3} \cdot \frac{\overset{9}{27}}{16} = 9$$

$$\frac{48}{50} : \frac{75}{100} = \frac{48}{50} : \frac{3}{4} = \frac{\overset{16}{\cancel{48}}}{\underset{25}{\cancel{50}}} \cdot \frac{\overset{2}{\cancel{4}}}{\cancel{3}} = \frac{32}{25} = 1\frac{7}{25}$$

$$3 : \frac{3}{4} = \frac{\cancel{3}}{1} \cdot \frac{4}{\cancel{3}} = 4$$

$$\frac{5}{6} : 15 = \frac{5}{6} : \frac{15}{1} = \frac{5}{6} \cdot \frac{1}{\cancel{15}\ 3} = \frac{1}{17}$$

$$\frac{17}{3} : 51 = \frac{\cancel{17}}{3} \cdot \frac{1}{\cancel{51}\ 3} = \frac{1}{9}$$

$$18 : 0{,}625 = 18 : \frac{5}{8} = 18 \cdot \frac{8}{5} = 28\frac{4}{5}$$

Auch hier bieten sich Vortheile dar, die man nicht übersehen muß.

$$752 : 375 = 0{,}752 : 0{,}375$$
$$= 0{,}752 : \tfrac{3}{8} = 0{,}752 \cdot \tfrac{8}{3} = 2{,}00\,5\tfrac{1}{3}$$

$$15\frac{3}{4} : 8\frac{7}{9} = \frac{63}{4} : \frac{79}{9} = \frac{63}{4} \cdot \frac{9}{79} = 1\frac{251}{316}$$

$$\frac{3}{4} = \frac{1}{\frac{4}{3}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}}$$

$$\frac{5}{6} = \frac{5}{\frac{2}{3}}$$

$$4 = \frac{4}{\frac{5}{7}}$$
$$\frac{7}{5}$$

Gilt der Ducaten 2 Thlr. 20 Gr. d. i. $2\frac{5}{6}$ Thaler, so beträgt ein Gulden $\frac{\frac{2}{3}}{2\frac{5}{6}}$ d. i. $\frac{2}{3}$ der Größe, wovon $2\frac{5}{6}$ einen Ducaten ausmachen, also $= \frac{\frac{2}{3}}{\frac{17}{6}} = \frac{2}{3} \cdot \frac{6}{17} = \frac{12}{51}$ des Ducaten.

Eine Stunde ist $\frac{\frac{1}{24}}{365\frac{1}{4}}$ des julianischen Jahres.

$\frac{7\frac{3}{4}}{24}$ Thlr. $=$ 7 Gr. 8 Pf.

Von complexen Zahlen.

109.

Obgleich die bisher gegebenen Regeln auch bey der Rechnung mit complexen Zahlen angewendet werden können, so halten wir es doch für nöthig, diese hier noch besonders zu betrachten, weil die Eintheilung ihrer Haupteinheiten oft Gelegenheit verschaft, die Rechnung zu erleichtern.

Es giebt zwar verschiedene Arten der complexen Zahlen, und die Regeln mit ihnen zu rechnen, hängen sehr von der Eintheilung der Haupteinheit ab. Man hat aber deshalb nicht nöthig, alle diese Arten durchzurechnen, sondern es kommt bloß darauf an, die Menge der Theile der Haupteinheit und ihrer Unterabtheilung zu wissen.

Am Ende dieses ersten Theiles wird man die Verhältnisse der vorzüglichsten Maaße, Gewichte u. s. w. finden.

Von der Addition complexer Zahlen.

110.

Sind complexe Zahlen zu addiren gegeben; so schreibt man sie alle gehörig unter einander, dergestalt, daß alle Theile von einer Art auch eigene Reihen machen. Ist dieses geschehen, so ziehe man unter alle eine Linie, und addire sodann die Theile der kleinsten Art zuerst. Enthält ihre Summe keine Einheit der unmittelbar größern Art, so schreibt man sie unter die addirte Reihe. Enthält sie aber eine oder mehrere Einheiten, der unmittelbar größern Art; so schreibt man unter die addirte Reihe bloß den Ueberschuß dieser Einheiten, behält diese, um sie zu ihres Gleichen zu addiren, im Sinn, und verfährt nun gleichergestalt mit der daher erhaltenen Summe.

Erstes Beyspiel.

Man soll addiren	227	Thlr.	14	Gr.	8 Pf.
	2549	—	18	—	5 —
	184	—	11	—	11 —
	17	—	10	—	7 —
	2979	Thlr.	7	Gr.	7 Pf.

Da 31 Pfennige, oder 2 Gr. 7 Pf., die Summe der kleinsten Gattung ausmachen; so setze man die 7 unter die Reihe der Pfennige und behalte die 2 Gr., um sie zur folgenden Reihe der Groschen zu addiren, im Sinn. Nun addire man diese Reihe, deren Summe 55 Groschen oder 2 Thlr. 7 Gr. beträgt; schreibe die 7 unter die Reihe der Groschen, und addire die 2 Thlr. gewöhnlicherweise zu der Reihe der Thaler.

Zweytes Beyspiel.

Man soll addiren 50 Wispel, 12 Scheffel, 3 Metzen.

9	—	14	—	11	—
8	—	12	—	9	—
81 Wispel,		6 Scheffel,		11 Metzen.	

Da 27 Metzen oder 1 Scheffel 11 Metzen die Summe der Metzen beträgt, so schreibe man 11 unter die Reihe der Metzen, und addire 1 zu den Scheffeln; dann erhält man 54 Scheffel, oder 2 Wispel, 6 Scheffel. Endlich schreibe man die 6 unter die Scheffel und addire die 2 zu den Wispeln, dann entstehet die Summe von 1 Wispel. demnach enthält die ganze Summe 81 Wispel, 6 Scheffel, 11 Metzen.

Drittes Beyspiel.

13 Pfund	15 Unzen	6 Drachmen	1 Scrupel	14 Grain
26	14	7	2	23
34	4	5	—	20
54	2	7	2	18
32	15	3	1	19
162	5	7	—	22

Viertes Beyspiel.

Von einem Regimente sind drey Commandos abgeschickt: das erste bestehet aus 1 Kapitain, 3 Lieutenants, 8 Unterofficiers, 1 Tambour und 90 Gemeinen; das zweyte aus 2 Kapitains, 7 Lieutenants, 18 Unterofficiers, 2 Tambours und 216 Gemeinen, und das dritte aus 2 Lieutenants, 4 Unterofficiers und 50 Gemeinen. Wie viel Kapitains, Lieutenants u. s. w. befinden sich auf Commando?

das 1ste Com. best. a.	1	Kap.	3	Lieut.	8	Unterof.	2 Tamb. 90 Gem.
2te	"	"	2	7	18	2	216
3te	"	"	—	2	4	—	50
mith. sind a. Com.	3	Kap.	12	Lieut.	30	Unterof.	3 Tamb. 356 Gem.

Fünftes Beyspiel.

Ein Major erhält zum Unterhalt seiner Pferde monatlich

	2 Wspl.	8 Sch.	1 V.	u. 3 Mtz.
ein Kapitain	1	10	—	—
ein Lieuten.	—	8	1	—
Sämmtliche Officier bekommen also monatlich	4 Wspl.	2 Sch.	2 V.	3 Mtz.

Sechstes Beyspiel.

Es wird an Pulver zu verschiedene Zeiten geliefert:

2 Ct.	109	Pfund kosten	89 Thlr.	2 Gr. 6 Pf.
1	55		48	3 —
—	98		32	16 —
5 Ct.	42	Pf. kosten also	169 Thlr.	21 Gr. 6 Pfennige.

Siebentes Beyspiel.

54 Toisen 2 Fuß 3 Zoll 9 Linien.

12	5	4	11
9	4	11	11
8	2	9	10
Summa 85	3	6	5

Die Summe der Linien beträgt 41 = 3 Zoll und 5 Linien; man schreibt die 5 Linien hin und zählt die 8 Zoll zu den Zollen, deren Summe 30 Zoll = 2 Fuß + 6 Zoll macht; die 6 Zoll schreibt man hin und zählt die 2 Fuß zu den Fußen, die zusammen 15 Fuß = 2 Toisen + 3 Fuß geben; man schreibt die 3 Fuß hin und zählt die 2 Toisen zu den Toisen, deren Summe 85 Toisen beträgt.

Von der Subtraction complexer Zahlen.

70.

Man schreibe die gegebenen Zahlen wie bey der Addition unter einander, und ziehe die Einheiten der

der kleinsten Art zuerst von einander ab. Kann die untere Zahl von der obern abgezogen werden, so schreibe man den Rest hier unter. Gehet dieses nicht an, so borge man von der nächst größten Art eine Einheit, verwandle diese in ihre zunächst kleinere Einheiten, addire die Zahl, von der nicht abgezogen werden konnte, dazu, und verrichte sodann die Subtraction.

Eben so verfahre man mit jeder Art, bemerke aber dabey, daß jede Zahl, bey welcher man zu borgen genöthigt ist, eine Einheit weniger giebt. Endlich schreibe man jeden Rest unter die Gattung, bey welcher die Subtraction geschehen ist.

Erstes Beyspiel.

von 143 Rthlr. 17 Gr. 6 Pf.
soll abgezogen werden 75 — 12 — 9
68 Rthlr. 4 Gr. 9 Pf.

Da 9 Pfennige von 6 Pfennigen nicht abgezogen werden können, so borge man einen Groschen; dieser enthält 12 Pfennige, die zu den 6 Pfennigen addirt, 18 betragen. Nun ziehe man 9 von 18 ab, so bleiben 9 Pf. Ferner ziehe man 12 Gr. nicht von 17 Gr., sondern weil eine Einheit geborgt worden ist, von 16 Gr. ab, so bleiben 4 Gr., und endlich subtrahire man 75 Thaler von 143 Thaler, so bleiben 68 Thaler.

Zweytes Beyspiel.

Wenn von 163 Rthlr. 0 Gr. 5 Pf. abgezogen werden sollen.
84 18 9
Rest 78 Rthlr. 5 Gr. 8 Pf.

so siehet man, daß die 9 Pfennige von 5 Pfennigen nicht abzuziehen, und überdies keine Groschen gegeben sind, von welchen man borgen könnte. Deshalb borge man von den 163 Thalern einen Thaler, lasse aber davon in Gedanken 23 Gr. in der Stelle der Groschen stehen, und verfahre hierauf, wie oben.

Drittes Beyspiel.

Zur Verfertigung einer gewissen Menge Patronen erhält man 1 Ball. 4 Rieß 16 Buch — Bogen

Man hat aber nur nöthig — 9 18 15

mithin bleiben übrig — 4 Rieß 17 Buch 9 Bogen

Viertes Beyspiel.

Eine Kasse empfängt für eine Besatzung aus 4 Regimentern bestehend, folgende Gelder:

für d. 1ste	7840	Tlr.	12	Gr.	3	Pf.	giebt aber 7814	Tlr. 22 Gr. — Pf.
für d. 2te	6957		18		4		nur aus 6896	23 6
für d. 3te	5986		2		9		5665	10 9
für d. 4te	4666		19		10		4646	4 5
Summa	25451	Tlr.	5	Gr.	2	Pf.	Summa 25023	Tlr. 12 Gr. 8 Pf.

427 Tlr. 16 Gr. 6 Pf. bleibt Bestand.

Von der Multiplication complexer Zahlen.

112.

Man kann bey der Multiplication complexer Zahlen überhaupt nach den bey der Multiplication der Brüche gegebenen Regeln verfahren (§. 96. 97 und 98.)

Will man z. B. wissen, wie viel 54 Wispel 3 Scheffel kosten werden, wenn ein Wispel mit 21 Thlr. 17 Gr. 8 Pf. bezahlet wird; so verwandle man den Multiplicandus in lauter Pfennige, wodurch 6260 Pfennige entstehen. Da nun der Pfennig der 288ste Theil vom Thaler ist, so kann der Multiplicandus folgendergestalt, $\frac{6260}{288}$ Thaler vorgestellet werden. Eben so verwandle man den Multiplicator 54 Wispel, 3 Scheffel in lauter Scheffel, wodurch man 1299 Scheffel erhält. Der Scheffel ist aber der 24ste Theil eines Wispels, folglich der Multiplicator $1\frac{299}{24}$ Wispel. Demnach kann die Aufgabe jetzt so vorgetragen werden, daß $\frac{6260}{288}$ Thaler mit $1\frac{299}{24}$ Wispel multiplicirt werden sollen, wodurch

(nach 96) $\frac{1327740}{1152}$ Thaler entstehen, die (nach §. 102) 1176 Rthlr. 11 Gr. $2\frac{1}{2}$ Pf. betragen.

Diese Art zu rechnen könnte man bey allen Arten von complexen Zahlen anwenden: da sie aber das Rechnen weit beschwerlicher macht als die folgende, so wollen wir uns nicht länger dabey aufhalten.

113.

Eine Zahl, die in einer andern ganz genau enthalten ist, wird ein aliquoter Theil dieser Zahl genannt, also ist 3 ein aliquoter Theil von 12, desgleichen 2, 4 und 6.

114.

Nun erinnere man sich, daß multipliciren nichts anders heißt, als den Multiplicandus eine gewisse Anzahl mal nehmen. So heißt mit $8\frac{3}{4}$ z. B. multipliciren: man soll den Multiplicandus 8 mal und hernach noch $\frac{3}{4}$ mal, oder welches einerley ist, $\frac{3}{4}$ von demselben nehmen. Diese $\frac{3}{4}$ erhält man aber, wenn entweder der 4te Theil des Multiplicandus 3 mal zu sich selbst addirt wird, oder wenn man zu der Hälfte des Multiplicandus noch ihre Hälfte addirt.

Demnach müßte man, um 84 mit $8\frac{3}{4}$ zu multipliciren, schreiben.

84
$8\frac{3}{4}$

672
42
21
---
735 Product.

und

und 84 mit 8 multipliciren, wodurch 672 entsteht. Ferner müßte man $\frac{3}{4}$ von diesen 84 nehmen, welches geschehen kann, wenn zuerst die Hälfte von 84, und um das folgende Viertel zu erhalten, von dieser Hälfte wiederum die Hälfte genommen wird. Werden nun diese 3 besondern Producte addirt; so erhält man 735 zum ganzen Product.

115.

Um nun Vorstehendes auf die complexen Zahlen anzuwenden, bemerke man, daß die verschiedenen kleinern Arten einer Haupteinheit sowohl in Betracht gegen einander, als gegen die Haupteinheit wie Brüche angesehen werden können.

Demnach zerfälle man, um eben so bequem, als in vorhergehenden Beyspiel mit diesen Arten von Zahlen zu multipliciren, die kleinern Gattungen auf die zur Anwendung bequemste Art, in aliquote Theile der Haupteinheit, oder in aliquote Theile einer von den kleinern Gattungen. Könnte man aber keine andere aliquote Theile erhalten, als solche, bey welchen die bey dieser Rechnung gewöhnliche Bequemlichkeit nicht anzutreffen wäre, so verschaffe man sich dieselbe durch falsche Producte, welches Verfahren die folgenden Beyspiele erklären werden. Man erinnere sich hier, daß der Multiplicator immer eine unbenannte Zahl seyn, oder so angesehen werden muß. Z. E. in folgendem Beyspiele erfordern 60 Morgen offenbar 60 mal so viel Saamen als ein Morgen und 90 Quadratruthen $= \frac{90}{180} = \frac{1}{2}$ Morgen offenbar $\frac{1}{2}$ mal so viel als 1 Morgen. Ein ähnliches Raisonement kann man bey allen folgenden Beyspie-

len anbringen, und nur in diesem Sinne kann die Multiplication geschehen.

Erstes Beyspiel.

Wenn ein Morgen, um ihn mit Kiehnäpfeln zu besäen, 12 Scheffel erfordert, wie viel Kiehnäpfel wird man bedürfen, um 60 Morgen 90 Quadratruthen zu besäen?

Dieses zu bestimmen, müssen, wie leicht zu sehen ist,

12 Scheffel mit
60 Morgen 90 Quadratruthen multiplicirt werden

20
6 Product für 90 Quadratruthen

726 Scheffel

Deshalb multiplicire man erst, nach der gewöhnlichen Regel, die 12 Scheffel mit den 60 ganzen Einheiten, die hier Morgen sind. Hernach aber mit 90 Quadratruthen, und einer halben Einheit, wo dann im letzten Product nicht mehr als 6 Scheffel geschrieben werden können. Werden diese nun zu dem ersten Product addirt; so erhält man 726 Scheffel zum ganzen Product.

Zweytes Beyspiel.

Soll man aber 12 Scheffel mit
60 Morg. 120 Quadratruthen multiplic.

720
6 Product für 90 Quadratruthen.
2 30

728 Scheffel

so multiplicire man zuerst, wie gewöhnlich, die 12 Scheffel mit 60 Morgen, und zerfälle hierauf, statt mit $\frac{120}{180}$ zu multiplicirен (weil 120 Quadratruthen $\frac{120}{180}$ eines Morgens sind) die 120 Quadratruthen in 90 und 30 Quadratruthen. Da nun 90 Quadratruthen die Hälfte eines Morgens, und 30 Quadratruthen der dritte Theil von 90 Quadratruthen sind; so nehme man erstlich von 12 Scheffeln die Hälfte, und hernach von dieser Hälfte den dritten Theil, addire sodann

sämmtliche Producte; so erhält man 728 Scheffel zum ganzen Product.

Drittes Beyspiel.

Oder man soll 12 Scheffel mit
60 Morg. 162 Quad. Ruth. 68 Quad. Fuß
multipliciren

720

6 Product für 90 Quadratruthen
4 — 60 —
0 Scheffel $10\frac{2}{3}$ Mtz. Prod. für 10 Quad. R.

′	—	$2\frac{2}{15}$	′	′	′ 2	′
′	—	$\frac{8}{15}$	′	′	′ 50	Quad. F.
′	—	$\frac{8}{75}$	′	′	′ 10	′
′	—	$\frac{4}{75}$	′	′	′ 5	′
′	—	$3\frac{8}{75}$	′	′	′ 2	′
′	—	$\frac{4}{375}$	′	′	′ 1	′

730 Scheff. $13\frac{107}{375}$ Metzen

so multiplicire man wiederum, wie gewöhnlich, die 12 Scheffel mit 60, und zerfälle hierauf 162 Quadratruthen in 90, 60, 10 und 2 Quadratruthen. Sodann nehme man für das Product von 90 Quadratruthen die Hälfte, und für das Product von 60 Quadratruthen den dritten Theil von 12 Scheffeln, weil 90 Quadratruthen die Hälfte und 60 Quadratruthen der dritte Theil eines Morgens sind.

Für das Product von 10 Quadratruthen nehme man aber, weil 10 Quadratruthen von 60 Quadratruthen der 6te Theil sind, von dem letzten Producte den 6ten Theil = $10\frac{2}{3}$ Metzen. Eben so nehme man für das Product von 2 Quadratruthen, von diesem sechsten Theil ein Fünftel = $2\frac{2}{15}$ Metzen, weil 2 Quadratruthen von 10 Quadratruthen $\frac{1}{5}$ sind.

Ferner zerfälle man, um mit 68 Quadratfuß zu multipliciren, dieselbe in 50, 10, 5, 2, 1, und vergleiche diese, statt mit einem Morgen, mit den letztern 2 Quadratruthen, von welchen 50 Quadratfuß der vierte Theil sind. Man nehme also von $2\frac{2}{15}$ Metzen den vierten Theil, dann erhält man $\frac{8}{15}$ Metze für das Product von 50 Quadratfuß. Desgleichen

nehme man für das Product von 10 Quadratfuß von $\frac{8}{25}$ Metze den 5ten Theil $= \frac{8}{125}$ Metze, weil 10 Quadratfuß von 50 Quadratfuß der 5te Theil ist. Eben so nehme man von diesem letzten Product für das Product von 5 Quadratfuß die Hälfte $= \frac{4}{125}$ Metze, weil 5 aus 10 die Hälfte ist. Und da 2 aus 10 der 5te Theil ist, so nehme man für das Product von 2 Quadratfuß, von dem für 10 Quadratfuß den 5ten Theil $= \frac{8}{250}$ Metzen. Endlich nehme man, weil 1 von 2 die Hälfte ist, für das Product von einem Quadratfuß, von dem letzten Product die Hälfte $= \frac{4}{375}$ Metze. Werden nun sämmtliche Producte addirt; so erhält man 730 Scheffel $13\frac{109}{375}$ Metzen zum ganzen Product.

Folgende Beyspiele sollen zur eigenen Berechnung überlassen werden.

Man weiß, daß ein Morgen urbar zu machender Sandscholle 43 Fuder kiefern Deckreisig erfordert, wie viel Fuder würde man bedürfen, um 91 Morgen, 78 Quadratruthen zu decken? Antwort; 3931 Fuder.

Wenn ein Scheffel Saamen 3 Thaler kostet, wie viel wird man für 23 Scheffel, 13 Metzen bezahlen müssen? Antwort: 71 Thaler, 10 Groschen, 6 Pfennige.

Wenn ein Cubicfuß Nutzholz 5 Groschen kostet, wie viel wird man für 29 Cubicfuß 108 Cubiczoll bezahlen müssen? Antw. 6 Thlr. 5 Gr. 9 Pf.

Wenn ein Probemorgen 40 Klafter Holz enthält, wie viel Klaftern werden auf 36 Morgen, 71 Quadratruthen stehen? Antw. $1455\frac{5}{9}$ Klafter.

Ein Scheffel Kiehnäpfel kostet 4 Groschen, was kosten 684 Scheffel, 14 Metzen? Antw. 114 Thlr. 3 Gr. 3 Pf.

116.

Ist hingegen der Multiplicandus auch eine complexe Zahl, so verfahre man nach der bey den folgenden Beyspielen gegebenen Erklärung.

Viertes Beyspiel.

Wenn ein Morgen, unter den Saamenbäumen, der Wurzeln wegen, zu hacken, 2 Thlr. 7 Gr. 6 Pf. kostet, was wird für 9 Morgen, 19 Quadratruthen bezahlet werden müssen?

Nach dieser Aufgabe müssen
2 Thlr. 7 Gr. 6 Pf. mit
9 Morg. 19 Quadratr. multiplic. werden

18 Thlr.

Product für 6 Gr.		2	;	6 Gr.	
Product für 1 Gr.		;	;	9	;
—	6 Pf.	;	;	4	; 6 Pf.
—	15 Quadratruthen	4	;	$7\frac{1}{2}$	;
—	3	;	;	;	; $11\frac{1}{10}$;
—	1	;	;	;	; $3\frac{3}{10}$;

21 Thlr. 1 Gr. $4\frac{3}{10}$ Pf.

Deshalb multiplicire man erstlich die 2 Thlr. mit 9, zerfälle hierauf die 7 Gr. in 6 Gr. und 1 Gr., und schließe sodann: da 6 Gr. der 4te Theil von 1 Thlr. sind, so müssen auch 6 Gr. mit 9 multipliciret, 8 mal den 4ten Theil von einem Thaler oder den 4ten Theil von 9 Thalern bestimmen. Demnach giebt das Product von 6 Gr. mit 9 multiplicirt, 2 Thlr. 6 Gr. Ferner, um 1 Gr. mit 9 zu multipliciren, bemerke man, daß, weil 1 Gr. der 6te Theil aus 6 ist, man auch von dem zuletzt erhaltenen Product, 2 Thlr. 6 Gr., den 6ten Theil der 9 Gr. beträgt,

nehmen müsse. Eben so schließe man, daß, um 6 Pfennige mit 9 zu multiplieiren, auch weil 6 Pf. die Hälfte eines Groschens sind, die Hälfte von dem so eben erhaltenen Product für 1 Groschen genommen werden müsse.

Mit denen 19 Quadratruthen multiplicire man, wie im vorhergehenden Beyspiele, das heißt, man nimmt erstlich für 15 Quadratruthen den 12ten Theil des Multiplicandus; hernach für 3 Quadratruthen den 5ten Theil von diesem 12ten Theil, und endlich für eine Quadratruthe den 3ten Theil, von dem zuletzt gefundenen Product.

Addirt man nun sämmtliche Producte; so erhält man 21 Thlr., 1 Gr., $4\frac{3}{10}$ Pf. zum ganzen Product.

117.

Da aber nicht jederzeit die zerfällten Theile oder Factoren so leicht wie bisher bestimmt werden können; so soll das folgendende Beyspiel lehren, wie man in solchem Fall verfahren müsse.

Fünftes Beyspiel.

Wenn 1 Scheffel Saamen 1 Thlr., 12 Gr., 2 Pf. kostet, wie viel wird man für 13 Scheffel bezahlen?

1 Thlr. 12 Gr. 2 Pf.
13 = — —

13 Thlr.
6 12 Gr.
= 2 = 2 Pf.

19 Thlr. 14 Gr. 2 Pf.

Nachdem erstlich 1 Thlr. mit 13 Scheffel multiplicirt, und hierauf, um das Product für 12 Gr. zu bestimmen, die Hälfte von 13 genommen worden ist, so müssen noch 2 Pf. die von 1 Gr. der 6te Theil, und von 12 Gr. der 72ste Theil sind, mit 13 multiplicirt werden. Da aber 6 Thlr. 12 Gr. nicht bequem durch 72 zu theilen sind; so mache man sich

ein falsches Produkt, und theile erstlich 6 Thlr. 12 Gr. durch 12, wodurch das Product für 1 Gr. entsteht, welches 0 Thlr. 13 Gr. beträgt. Hierauf nehme man den 6ten Theil desselben, und setze diesen unter das Product für 12 Gr., welches nunmehr, da nur der 6te Theil von 1 Groschen verlangt wird, ausgestrichen werden kann.

Sechstes Beyspiel.

Wenn man für 1 Thlr. 13 Scheffel erhält, wie viel wird man für 1 Thlr. 12 Gr. 2 Pf. bekommen?

Hier wird verlangt, daß 13 Scheffel mit 1 Thlr. 12 Gr. 2 Pf. multiplicirt werden sollen. Es sollen nemlich 13 Scheffel so oft genommen werden, als Einheiten in 1 Thlr. 12 Gr. 2 Pf. sind.

13 Scheffel
1 Thlr. 12 Gr. 2 Pf.

---

13 Scheffel
6 — 8 Metzen
$\frac{1}{2}$ — $1\frac{4}{9}$ —

---

19 Scheffel $9\frac{4}{9}$ Metzen.

In diesem Fall multiplicire man erstlich 13 Scheffel mit 1 Thlr., sodann nehme man, um 13 Scheffel mit 12 zu multipliciren, da 12 Gr. die Hälfte von 1 Thlr. sind, von 13 Scheffeln die Hälfte, welche 6 Scheffel, 8 Metzen beträgt. Ferner suche man, um bequem mit 2 Pf. multipliciren zu können, den 12ten Theil von dem Product für 12 Gr., welcher sodann das Product für 1 Gr. ist, und $8\frac{8}{9}$ Metzen giebt. Dies ist das falsche Product und wird ausgestrichen, sobald als der sechste Theil desselben, nemlich das Product für 2 Gr., welches $1\frac{4}{9}$ Metze beträgt, darunter gesetzt worden ist.

Beyde vorhergehende Beyspiele überführen uns von der (§. 45) angeführten Behauptung, daß es nothwendig sey, bey benannten Zahlen den Multiplicator zu unterscheiden. Denn die Factoren der beyden Beyspiele sind 13 Scheffel und 1 Thlr. 12

Gr. 2 Pf., die beyden Producte sind aber sehr von einander verschieden.

Endlich wollen wir noch folgende Beyspiele von derselben Art zu eigener Berechnung überlassen.

Wir wollen annehmen, daß, um eine gewisse Sandscholle durch Flechtzäune zu sichern 4808 Stück oder $80\frac{2}{15}$ Schock fünffüßige Pfähle erfordert werden; nun wird für 1 Schock derselben auszuhauen und zu spitzen 2 Gr. 9 Pf bezahlt, wie viel müßte also für die vorhergehende Anzahl bezahlet werden? Antw. 9 Thlr. 4 Gr. $4\frac{2}{5}$ Pf.

Eine Berliner Metze Bucheckern wiegt 3 Pfund 4 Loth, was wiegen $9\frac{3}{4}$ Metzen? Antwort: 30 Pfund, 15 Loth.

Wie viel beträgt der jährliche Sold einer Kompagnie, welcher monatlich 406 Thlr. 19 Gr. 6 Pf. ausgezahlt werden müssen?

Da das Jahr 12 Monate hat, so setzen wir:

In einem Monat werden 406 Thlr. 19 Gr. 6 Pf.

$$\frac{\text{mithin in einem Jahr 4881 Thlr. 18 Gr.} \quad - \quad}{12}$$

ausgezahlt.

Hier kann man sagen: 12 mal 6 Pf. giebt so viel, als 6 mal 12 Pf. = 6 mal 1 Gr. = 6 Gr. Weiter 12 mal 19 Gr. ist so viel als 19 mal 12 Gr. = 19 . $\frac{1}{2}$ Thlr. = 9 Thlr. 12 Gr. wozu die vorigen 6 Gr. gerechnet, 9 Thlr. 18 Gr. bestimmen; wir setzen also 18 Gr. hin. Und da endlich 12 mal 406 Thlr. = 4872 Thlr., mithin 4872 Thlr. + 9 Thlr. = 4881 Thaler; so ist klar, daß jährlich die Kompagnie 4881 Thlr. 18 Gr. empfängt.

Sollte nach einer richtigen Vergleichung ein Regiment 33 Centner, 100 Pfund, 16 Loth Pulver erhalten, welches mit 1165 Thlr. 15 Gr. 3 Pf. bezahlt würde, und man wollte wissen, wie viel Pulver an 6 Regimenter ausgegeben und was da-

für bezahlt worden? so sehen wir, daß 6 mal so viel empfangen und auch 6 mal so viel dafür bezahlt werden muß folglich setzt man: 1 Regiment empfängt

33 Ct. 100 Pf. 16 Lt., welche kost. 1165 Thl. 15 Gr. 3 Pf. 6

mithin 203 Ct. 53 Pf. — welche kost. 6993 Thl. 19 Gr. 6 Pf. 6 Reg.

Eine complexe Zahl durch eine incomplexe zu dividiren.

118.

Ist der Dividendus allein eine complexe Zahl, und die Einheiten des Divisors und des Dividendus sind noch überdies von verschiedener Art; so dividire man erstlich die Haupteinheiten nach der gewöhnlichen Regel; sodann verwandle man den Rest in Einheiten der zweyten Art, addire zu demselben die Einheiten des Dividendus von derselben Art, und dividire nun das Ganze, wie gewöhnlich. Ebenfalls verwandle man den Rest dieser Division in Einheiten der dritten Art, addire zu demselben die Einheiten des Dividendus von derselben Art, und dividire nun das Ganze wiederum, wie vorher. So fahre man fort, die Reste in Einheiten der folgenden Art zu verwandeln, so lange als eine kleinere Art im Dividendus enthalten ist.

Erstes Beyspiel.

Wenn für 587 Klafter Holz 1196 Thlr. 3 Gr. 9 Pf. bezahlt werden, wie viel beträgt dieses auf eine Klafter?

1196 Thlr. 3 Gr. 9 Pf. | 587 / 2 Rthlr. — Gr $10\frac{511}{587}$ Pf.

1174

22

24

88

44

531

12

1062

532

6381

587

511

Hier müssen 1196 Thlr. 3 Gr. 9 Pf. durch 587 dividirt, und bey den Thalern der Anfang gemacht werden.

Nun gaben 1196 Thaler, durch 587 dividirt, 2 Thlr. zum Quotienten und 22 zum Rest. Mithin verwandle man die 22 Thlr. in Gr., und addire (nach §. 57) die 3 Gr. des Dividendus dazu, wodurch 531 Gr. entstehen. Da diese nun durch 587 nicht dividirt werden können; so schreibe man im Quotienten 0 Gr., verwandle aber die 531 Gr. in Pfennige, und addire die 9 Pf. des Dividendus dazu, dann entstehen 6381 Pf. die, wenn sie endlich auch durch 587 dividirt werden, 10 zum Quotienten und 511 zum Rest geben. Demnach erhalten wir 2 Thlr. 0 Gr. $10\frac{511}{587}$ Pf. zum ganzen Quotienten.

Zweytes Beyspiel.

Wenn ein Forstrevier vermessen, und an Flächeninhalt 30000 Morgen 145 Quadratruthen groß gefunden worden ist, und dasselbe in drey Hauptabtheilungen in 2 Blöke, und jeder Block in 70 Schläge getheilet werden soll, wie groß wird die Morgenzahl eines Schlages seyn?

30000 Morgen 145 Quadratruthen

3) 10000 — 48 Quadratr. $33\frac{1}{3}$ □ Fuß eine Hauptabthl.

2) 5000 — 24 — $16\frac{2}{3}$ — Block

70) 71 — 77 — $48\frac{17}{21}$ — Schlag.

119.

Sind aber sowohl im Divisor als im Dividendus Einheiten von gleicher Art, so muß, ehe die Division geschiehet, untersucht werden, ob der Quotient auch von derselben Art seyn soll, welches jederzeit durch die Umstände der Aufgabe bestimmt wird.

120.

Ist nun der Divisor und der Dividendus von gleicher Art, und der Quotient soll auch von derselben Art seyn; so geschiehet die Division wie im vorhergehenden Fall. Hat man z. B. 7254 Thlr. mit 1243 Thlr. gewonnen, und will wissen, wie viel dieser Gewinn auf einen Thaler beträgt; so siehet man, daß die Art der Einheiten des Quotienten der Art des Divisors und des Dividendus gleich, d. h. Thaler seyn müssen, und daß mit 1243 in 7254 dividiret werden muß.

Läßt nun diese Division einen Rest, so muß dieser, wie in dem vorhergehenden Beyspiele, in Groschen, und der zweyte Rest in Pfennige verwandelt werden, wodurch man denn 5 Thlr. 20 Gr. $\frac{912}{1243}$ Pf. auf die vorhergehende Frage zur Antwort erhält.

121.

Ereignet es sich aber, daß zwar der Divisor und der Dividendus von gleicher Art sind, und von

denselben die Art des Quotienten ganz verschieden ausfallen soll; so verwandle man sowohl den Divisor als den Dividendus in die niedrigste Art des Dividendus. Sodann verrichte man die Division, wie in dem vorhergehenden Fall, behandle dabey aber die Einheiten des Dividendus so, als wenn sie Einheiten von der Art wären, welche der Quotiente haben soll.

Legt man z. B. diese Frage vor, wie viel Land wird man mit 3 Wispel, 7 Scheffel, 9 Metzen besäen, wenn 13 Scheffel zu einem Morgen erforderlich sind? So zeiget hier die Natur der Aufgabe, daß die Einheiten des Quotienten Morgen und Theile desselben seyn müssen.

Mithin verwandle man die 3 Wispel, 7 Scheffel, 9 Metzen in Metzen, wodurch 1273 Metzen entstehen. Eben so verwandle man die 13 Scheffel in Metzen; dann erhält man 208 Metzen. Nun dividire man 208 in 1273 so, als wenn die letztere Zahl Morgen wären; dann erhält man 6 Morgen $21\frac{3}{5}\frac{3}{2}$ Quadratruthen zum Quotienten.

Eine complexe Zahl durch eine complexe Zahl zu dividiren.

122.

Bestehet der Divisor aus einer comglexen Zahl; so verwandle man ihn erstlich (nach §. 57) in seine niedrigste Art. Sodann multiplicire man den Dividendus mit der Zahl, welche anzeigt, wie viel Theile der niedrigsten Art des Divisors in der Haupteinheit desselben enthalten sind, und verfahre nun, wie oben, wo der Divisor eine incomplexe Zahl war.

Beyspiel.

Man hat 57 Wispel, 5 Scheffel, 3 Metzen mit 254 Thlr., 17 Gr. 11 Pf. bezahlt; man will aber wissen, wie viel dieses auf einem Wispel beträgt?

Hier siehet man, daß 254 Thlr., 17 Gr., 11 Pf. durch 57 Wispel, 5 Scheffel, 3 Metzen dividirt werden müssen; mithin verwandle man die letzte Zahl in Metzen, wodurch 21971 Metzen zum neuen Divisor entstehen.

Da nun die Haupteinheit des Divisors ein Wispel ist, und dieser 384 Metzen enthält; so multiplicire man den Dividendus 254 Thlr., 17 Gr., 11 Pf. mit 384, dann erhält man 97822 Thlr., 16 Gr. zum neuen Dividendus, und die Division geschiehet nun folgendermaßen:

254 Thlr.	17	Gr.	11	Pf.	57 Wispel 5 Schfl. 3 Mtz.
384	12	2	6	2	
1616	4	3	4	3	21971 Metzen
2032	1	4	1	4	
762					4 Thlr. 10 Gr. 10 u. $\frac{2050}{21971}$ Pf.

97536 Thlr.
192
64
16
8
5 — 8
1 — 8

97822 Thlr. 16 Gr.
87884

9938 24

239728 Gr.
21971

20018 12

240216 Pf.
21971

20506

Die 97822 Thlr. durch 21971 dividirt, geben 4 Thlr. zum Quotienten und 9938 Thlr. zum Rest. Diesen Rest verwandle

man in Groschen, und addire die 16 Gr. des Dividendus dazu, dann erhält man 239728 Gr., die durch 21971 dividirt, 10 Gr. zum Quotienten und 20018 Gr. zum Rest geben. Diesen Rest verwandle man wieder in Pfennige; so entstehen 240216 Pfennige, die durch 21971 dividirt, 10 Pf. zum Quotienten und 20506 Pf. zum Rest geben, daß also der ganze Quotient 4 Thlr. 10 Gr. $10\frac{20506}{21971}$ Pf. beträgt.

Um diese Regel einzusehen, dient folgendes. Man bemerke, daß, da die 57 Wispel, 5 Scheffel, 3 Metzen in Metzen verwandelt worden sind, und die Metze der 384ste Theil eines Wispels ist, der Divisor durch 2^{21972}_{384} Wispel vorgestellt werden kann. Da aber, wenn durch einen Bruch dividiert wird, der Bruch des Divisors umgekehrt, und dann mit demselben multiplicirt werden muß (§. 201); so muß auch hier nach Vorschrift der Regel mit $\frac{334}{21971}$ multiplicirt, das heißt, erstlich mit 384 multiplicirt und sodann durch 21971 dividirt werden.

Da wir nun sehen, daß mit einer complexen Zahl eben so, als mit einer incomplexen Zahl dividirt wird; so müssen wir in Ansehung der Einheiten auch die (§. 118, 119, 120) vorgetragene Regel beobachten. Hier wäre die Art von der sogenannten geometrischen Multiplication und Division zu reden: diese Operationen weichen in Ansehung des Verfahrens, von den Vorhergehenden nicht ab; so daß hier nichts weiter zuzusetzen bliebe, als die Natur der Einheiten der Factoren und des Products zu erklären; dieses gehört aber für die Geometrie. Wir werden daher das Weitere darüber, bis zur Geometrie, verschieben.

Von der Entstehung der Quadratzahlen und der Ausziehung ihrer Wurzel.

123.

Das Quadrat einer Zahl ist dasjenige Product, welches entstehet, wenn diese Zahl mit sich selbst multiplicirt wird.

Also ist 25 das Quadrat von 5, weil 5, mit sich selbst multiplicirt, 25 hervorbringt.

124.

Die Quadratwurzel einer gegebenen Zahl ist die Zahl, welche, wenn sie mit sich selbst multiplicirt wird, diese gegebene Zahl hervorbringt.

125.

Demnach ist eine Zahl, die zum Quadrat erhoben wird, zu gleicher Zeit Multiplicator und Multiplicandus, und vertritt also (nach §. 42) die Stelle der beyden Factoren des Products. Aus dieser Ursache wird dieses Product entweder Quadrat, oder die zweyte Potenz genannt.

Soll nun eine Zahl quadrirt werden, so sind die gewöhnlichen Regeln der Multiplication hinlänglich. Soll aber aus einer gegebenen Zahl die Quadratwurzel gezogen werden, durch deren Multiplication mit sich selbst das Quadrat entstanden ist; so bedarf man dabey besondere Regeln, insonderheit aber wenn das Quadrat, oder die gegebene Zahl aus mehr als zwey Ziffern besteht.

Enthält indessen eine gegebene Zahl bloß eine oder zwey Ziffern, so ist ihre Wurzel in ganzen Zahlen eine von den folgenden:

1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9.

und die Quadrate dieser Wurzeln sind

1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81.

So z. B. ist, wenn 72 zwischen 64 und 81 fällt, mithin auch ihre Wurzel zwischen 9 und 8 fallen muß, 8 in ganzen Zahlen die Quadratwurzel von 72. Demnach ist sie 8 und ein Bruch, welcher nun freylich nicht mit der genauesten Schärfe angegeben werden kann. Man kann aber, wie wir im kurzen sehen werden, der wahren Wurzel immer näher kommen.

126.

Die Quadratwurzel eines nicht vollkommenen Quadrats wird eine irrationale Zahl genannt.

127.

Nach diesen Erläuterungen wollen wir zu denen Quadratzahlen, die mehr als zwey Ziffern enthalten, übergehen. Wenn wir dabey auf die Entstehung derselben genau Acht geben, so werden wir aus dieser Entstehung die Regeln zur Ausziehung der Quadratwurzeln leicht entdecken.

Z. B. es soll die Zahl 54 quadrirt werden:

54
54

216
270

2916

Man multiplicire also, nachdem der Multiplicator und Multiplicandus, wie hier, unter einander geschrieben worden sind, die obere 4 durch die untere 4, wodurch

wodurch man das Quadrat der Einheiten erhält.

Ferner multiplicire man die obere 5 durch die untere 4, welches ein Product der Zehner in die Einheiten giebt.

Nun multiplicire man mit der zweyten Ziffer des Multiplicators, nemlich mit der untern 5 die obere 4, wodurch das Product der Einheiten in die Zehner, oder (nach §. 44) der Zehner in die Einheiten hervorgebracht wird. Endlich multiplicire man die obere 5 mit der untern 5, wodurch das Quadrat der Zehner entsteht.

Werden diese Producte zusammen addirt, so entstehet das Quadrat 2916, welches, wie wir gesehen haben, aus dem Quadrat der Zehner, dem doppelten Product der Zehner in die Einheiten, und dem Quadrat der Einheiten, der gegebenen Zahl 54 zusammengesetzt ist.

128.

Da das so eben bemerkte sich aus den Regeln der Multiplication ergiebt; so siehet man leicht, daß dieses nicht allein von der Zahl 54, sondern auch von einer jeden aus Zehnern und Einheiten zusammengesetzten Zahl gesagt werden kann. Folglich kann man allgemein von dem Quadrat, einer aus Zehnern und Einheiten zusammengesetzten Zahl behaupten, daß es aus dreyen Theilen, nemlich dem Quadrat der Zehner dieser Zahl, dem doppelten Product der Zehner in die Einheiten, und dem Quadrat der Eineiten bestehe.

129.

Dieses vorausgesetzt, sehen wir, daß, da das Quadrat der Zehner in die Hunderte fällt (weil 10 mal 10 hundert ist), in den beyden letzten Ziffern des ganzen Quadrats von dem Quadrat der Zehner nichts enthalten seyn könne.

Ebenfalls kann in der letzten Ziffer des ganzen Quadrats nichts von dem doppelten Product der Zehner in die Einheiten enthalten seyn, weil, wenn Einheiten mit Zehnern multiplicirt werden, in die Stelle der Einheiten jederzeit eine Null zu stehen kommt.

Soll demnach aus dem Quadrat 2916 die Wurzel gezogen werden, so schließe man, indem mit den Zehnern der Wurzeln der Anfang gemacht wird, folgender Gestalt:

Erstes Beyspiel.

29	16	54 Wurzel
25		
4	16	
1	04	
4	16	

Da die Entstehung des Quadrats uns lehrt, daß in dem Quadrat 2916 zwar das Quadrat der Zehner, aber von diesem nichts in den beyden letzten Ziffern enthalten ist; so muß es in 29 enthalten seyn. Da nun die Quadratwurzel von 29 nicht größer als 5 seyn kann, so schließen wir, daß die Anzahl der Zehner, von der Wurzel, 5 ist, und

ſetzen dieſe dem gegebenen Quadrat zur Seite, wie hier oben zu ſehen iſt.

Hierauf quadrire man 5 und ziehe das Quadrat 25 von 29 ab; dann bleibt 4, welcher man 16, nemlich die beyden letzten Ziffern der Zahl 2916, zur Seite herunterſetzen.

Um nun die Einheiten der Wurzel zu beſtimmen, bemerken wir, daß in dem Reſt 416 noch das doppelte Product der Zehner in die Einheiten und das Quadrat der Einheiten enthalten iſt. Von dieſen beyden Theilen iſt aber der erſte ſchon hinlänglich, die verlangten Einheiten zu beſtimmen, weil er das doppelte Product der Zehner in die Einheiten enthält. Dividirt man ihn alſo durch die uns bekannten zweyfachen Zehner, ſo muß (nach §. 67) der entſtehende Quotient die Einheiten zeigen. Demnach darf man bloß wiſſen, in welchem Theil von 416 das zweyfache Product der Zehner in die Einheiten enthalten iſt. Wir haben aber oben ſchon bemerkt, daß in der letzten Ziffer von demſelben nichts enthalten ſey; mithin iſt es in 41 begriffen. Demnach muß mit 10, d. h., mit dem zweyfachen gefundenen Zehnern in 41 dividirt werden. Man ſchreibt alſo 10 unter 41 und dividirt; dann giebt der Quotient 4 die Anzahl der Einheiten, welche man den 5 Zehnern zur rechten ſetzt.

Ob nun gleich im gegenwärtigen Fall 4 der wahre Quotient iſt; ſo kann es ſich doch zutragen daß der auf dieſe Art gefundene Quotient gröſſer iſt, als er ſeyn ſoll. Denn die Zahl 41, d. h. der nach der Trennung der letzten Ziffer übrigblei-

bende Theil, enthält nicht allein das zweyfache Product der Zehner in die Einheiten, sondern auch noch die Zehner von dem Quadrat der Einheiten. Damit nun kein Zweifel übrig bleibe, ob die Wurzel der Einheiten richtig gefunden sey; so kann man sich auf folgende Art davon überzeugen.

Nachdem die gefundenen Einheiten zu den Zehnern der Wurzeln geschrieben worden sind, so setze man diese 4 zu dem zweyfachen Product der Zehner, welches zusammen 104 beträgt. Diese Zahl multiplicire man mit derselben Ziffer 4 und ziehe die hierdurch entstehenden Producte nach und nach von den gleichnamigen Theilen der Zahl 416 ab. Da nun nichts übrig bleibt; so schließe man, daß 54 die wahre Wurzel sey.

Bleibt aber ein Rest, so ist dessenungeachtet die gefundene Wurzel in ganzen Zahlen richtig, wenn nur der Rest nicht größer ist, als die um Eins vermehrte doppelte Wurzel; welches aber, wenn man nur jederzeit den möglich größten Quotienten nimmt, nicht zu befürchten ist.

Der Beweis des Vorhergehenden gründet sich auf die Entstehung des Quadrats selbst. Denn multiplicirt man 104 mit 4, so entsteht das Quadrat der Einheiten und das zweyfache Product der Zehner in die Einheiten, dasjenige, was noch zum vollkommenen Quadrat fehlt.

130.

Aus diesem allen folgt, daß, wenn aus einer Zahl, die nicht mehr als 4 Ziffern und nicht weniger als

3 Ziffern enthält, die Quadratwurzel zu ziehen ist, man zwey Ziffern rechter Hand von dieser Zahl abschneidet, und von dem Abschnitt linker Hand die Quadratwurzel abziehen müsse, welche alsdann die Anzahl der Zehner der ganzen gesuchten Wurzel ist. Diese schreibt man der gegebenen Zahl zur Seite indem man sie durch einen Strich von derselben trennet.

Ferner muß man von eben diesem Abschnitt das Quadrat der jetzt gefundenen Wurzel abziehen, und nachdem der Rest unter dasselbe geschrieben worden ist, die beyden Ziffern von dem Abschnitt, diesem Rest rechts zur Seite herunter setzen. Sodann muß man von diesen beyden heruntergesetzten Ziffern die Ziffer der Einheit durch einen Punct trennen, und die links diesem Punct bleibende Ziffern durch die unter sie gesetzten zweyfachen Zehner der Wurzel dividiren.

Hierauf muß man weiter den gefundenen Quotienten rechts den Zehnern der Wurzel, wie auch rechts den zweyfachen Zehnern, durch welche dividirt worden ist, schreiben; und endlich mit diesem Quotienten die zuletzt neben einander gestellten Ziffern multipliciren, und von dem zustimmenden Ziffern der obern Linie die hierdurch entstehenden Producte nach und nach abziehen.

Folgendes Beyspiel soll die so eben vorgetragenen Regeln deutlicher machen.

Aus dem Quadrat 7569 soll die Quadratwurzel gezogen werden:

75	69	87 Wurzel
64		
11	69	
1	67	
11	69	

Man trenne die beyden Ziffern 69 und suche zu 75 die Quadratwurzel, welche 8 ist; diese schreibe man der gegebenen Zahl zur Seite, quadrire sie, und ziehe von 75 das Quadrat 64 ab. Dann bleibt 11, welche unter 75 geschrieben, und ihnen zur Seite die zuvor abgeschnittenen 69 herunter gesetzt werden.

Ferner trenne man von 1169 die letzte Ziffer 9; dann erhält man den Theil 116, in welchen, um die Einheiten zu bestimmen, dividirt werden muß.

Nun verdopple man, um den hierzu erforderlichen Divisor zu erhalten, die gefundenen Zehnner 8, schreibe dieselben unter 116 und dividire; dann erhält man 7 zum Quotienten, welche den 8 Zehnern zur Rechten geschrieben werden.

Endlich setze man diesen Quotienten 7 auch zur Seite des Divisors 16, multiplicire 167 mit demselben Quotienten 7, ziehe das gefundene Product von 1169 ab, und schließe, da nichts übrig bleibt, daß 7569 ein vollkommnes Quadrat und das Quadrat von 87 seyn müsse.

131.

Es ist wohl zu bemerken, daß durch die zweyfachen Zehner bloß der nach der Trennung der letzten Ziffern übriggebliebene Theil zur Linken dividirt werden muß. Ereignet es sich aber, daß die zweyfachen Zehner in diesem Theile nicht enthalten sind, so muß die getrennte Ziffer nicht dazu genommen sondern eine Null in die Stelle der Einheiten von

der Wurzel geschrieben werden. Sind aber im Gegentheil die zweyfachen Zehner öfter als 9 mal in diesem Theile enthalten, so müssen dessenungeachtet nicht mehr als 9, aus derselben Ursache, wie bey der Division (§. 63) in die Stelle der Einheiten von der Wurzel geschrieben werden.

132.

Ist nun das bisher gesagte von einer Quadratwurzel, in derem Quadrat nicht mehr als 4 Ziffern enthalten sind, wohl verstanden worden; so wird man auch leicht einsehen, wie man verfahren müsse, wenn in einem Quadrat mehrere Ziffern enthalten sind. Denn eine Wurzel mag aus so vielen Ziffern bestehen als sie wolle, so kann man sie doch als aus 2 Theilen, nemlich aus Zehnern und Einheiten, bestehend, sich vorstellen.

So z. B. kann man sich 874, als 87 Zehner und 4 Einheiten denken.

Dies vorausgesetzt, kann man, wenn die beyden ersten Ziffern der Wurzel gefunden worden sind, sehr leicht nach der bisher gezeigten Art die dritte finden. Man betrachte nemlich diese beyden Ziffern als Zehner, und sehe sodann, um die dritte Ziffer zu erhalten, auf eben das Verfahren, welches, nachdem man die erste Ziffer gefunden hat, die zweyte zu bestimmen, nöthig war.

Eben so betrachte man wiederum, wenn die drey ersten Ziffern gefunden worden sind und die vierte bestimmt werden soll, diese 3 Ziffern als Zeh-

ner, und verfahre nach eben der Art, die man anwenden mußte, um die dritte Ziffer zu bestimmen, nachdem die beyden ersten gefunden waren, u. s. w.

Um aber mit Ordnung zu verfahren, theile man erst die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Abschnitte, deren jeder 2 Ziffern enthält; doch kann in dem letzten auch nur eine befindlich seyn.

Die Ursache dieser Vorbereitung gründet sich auf das Obige (§. 129 und folg.) da die Wurzel bloß aus Zehnern und Einheiten zusammen gesetzt war, und man die beyden Ziffern zur Rechten trennen mußte, um in dem Abschnitt zur Linken das Quadrat der Zehner zu erhalten. Da nun hier in diesem Abschnitt mehr als 2 Ziffern enthalten sind, so müssen aus eben dem Grunde wieder 2 Ziffern zur Rechten getrennt werden, u. s. f. Ein Beyspiel dieser Art wird dieses näher erklären.

Drittes Beyspiel.

76	80	76	96	8764
64				
12	80			
11	67			
11	69			
1	11	76		
	17	46		
1	04	76		
7	00	96		
1	75	24		
7	00	96		

Nachdem die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Abschnitte, deren jeder 2 Ziffern enthält, getheilet worden ist, bestimme man die Wurzel von 76, d. h. von dem Abschnitt, der am mehresten links steht; diese ist 8, und wird der gegebenen Zahl zur Seite geschrieben. Nun quadrire man 8 und ziehe 64 von 76 ab; schreibe dann unter die abgezogenen Zahlen den Rest 12, rücke zu demselben den Abschnitt 80 herunter, und trenne von diesem die letzte Ziffer 0 durch einen Punkt. Ferner schreibe man unter 128 die gefundene Wurzel zweyfach und dividire mit 16 in 128, wodurch man 7 zum Quotienten erhält; welcher sowohl den 8 Zehnern der Wurzel, als auch den Divisor 16 zur Rechten geschrieben wird. Hierauf multiplicire man 167 mit 7, ziehe das entstandene Product von 1280 ab, setze zur Seiten des Rests 111, den Abschnitt 76 herunter, wodurch 11176 entsteht, und trenne die letzte Ziffer von dieser Zahl. Nun schreibe man unter 1117 die Wurzel 87 zweyfach, und dividire mit 174 in 1117, wodurch man 6 zum Quotienten erhält, die sowohl in der Folge, der Wurzel, als auch dem neuen Divisor zur Seite geschrieben wird. Hierauf multiplicire man 1746 mit dem Quotienten 6, ziehe das gefundene Product von 11176 ab, setze den Abschnitt 96 dem Rest 700 zur Seite, wodurch 70096 entsteht, und trenne die letzte Ziffer 6 von dieser Zahl. Nun schreibe man unter 7009 die Wurzel 876 zweyfach, und dividire mit 1852 in 7009, wodurch 4 zum Quotienten entsteht, welche sowohl der Wurzel 876, als auch dem Divisor 1752 zur Seite geschrieben wird. Endlich multiplicire man 17524 mit derselben Zahl 4, und ziehe das entstandene Product von 70096 ab; dann folgt, da nichts übrig bleibt, daß 8764 ganz genau von 76807696 die Quadratwurzel sey.

133.

Wenn die gegebene Zahl kein vollkommnes Quadrat ist, so wird die Rechnung am Ende einen Rest lassen, und die gefundene Wurzel ist sodann die Wurzel des in der gegebenen Zahl enthaltenen größten Quadrats. Soll nun die Wurzel aus einer solchen Zahl ganz genau gezogen werden, so ist

solches zwar unmöglich; man kann aber doch der Wahrheit so nahe kommen, daß das Fehlende unter jeder beliebigen Größe seyn muß.

Diese Näherung wird sehr bequem vermittelst der Decimalbrüche folgendermaßen erhalten: Man hängt der gegebenen Zahl doppelt so viel Nullen an, als man Decimalstellen in der Wurzel für nöthig achtet, und ziehet sodann die Wurzel, wie gewöhnlich, aus. Ist dieses geschehen, so schneidet man durch ein Komma zur rechten der Wurzel halb so viel Decimalstellen ab, als man zuvor an die gegebene Zahl Nullen anhieng. Die Ursache von diesem Verfahren ist diese: hätte man 4 Nullen angehängt; so müßte die gegebene Zahl 10000 mal, mithin die Wurzel 100 zu groß seyn, weil 10000 das Quadrat von 100 ist. Und hätte man 6 Nullen angehängt; so müßte das Quadrat 1000000 mal, mithin die Wurzel 1000 mal zu groß seyn, weil 1000000 das Quadrat von 1000 ist. Schneidet man also im ersten Fall 2 Ziffern von der Wurzel zur Rechten ab, so erhält die Wurzel ihren gehörigen Werth wieder.

Beyspiel.

Man will die Quadratwurzel der Zahl 87567 bis auf ein Tausendtheilchen wissen, da Tausendtheile in der Wurzel vorkommen sollen, so werden drey zehntheilige Zahlen verlangt; mithin müssen 6 Nullen an die gegebene Zahl 87567 angehängt und die Quadratwurzel muß aus 87567000000 gezogen werden.

8	75	67	00	00	00	) 295,917
4	.	.	.	.	.	
4	75	.	.	.	.	
4	49	.	.	.	.	
4	41	.	.	.	.	
34	67	.	.	.		
5	85	.	.	.		
29	25	.	.	.		
5	42	00	.	.		
5	59	09	.	.		
5	31	81	.	.		
10	19	60	.			
5	91	81	.			
4	27	19	00			
59	18	27				

Indem man eben so, wie bey dem vorhergehenden Beyspiel verfährt; so erhält man bis beynahe auf eine Einheit 295917 zur Wurzel von der Zahl 87567000000. Da dieselbe aber 1000000 mal größer, als die gegebene Zahl 87567 ist, so muß auch die gefundene Wurzel 295917 tausendmal kleiner gemacht werden, d. h., 3 Ziffern zur Rechten davon abgeschnitten werden. Folglich muß 295,917 die Wurzel von 87567 bis beynahe auf ein Tausendtheilchen seyn. Eben so würde man, wenn aus 2 die Quadratwurzel bis beynahe auf ein Zehntausendtheilchen gezogen werden sollte, die Quadratwurzel aus 200000000 ziehen, welche zu 14142 gefunden wird. Trennet man aber die 4 letzten Ziffern durch ein Komma, so ist 1,4142 die bis beynahe auf ein Zehntausendtheilchen genäherte Wurzel von 2.

134.

Wir haben oben (§. 97) gesehen, daß, um einen Bruch mit einem andern zu multipliciren, Zähler mit Zähler, und Nenner mit Nenner multiplicirt wer-

den mußte. Folglich müssen, um einen Bruch zu quadriren, Zähler und Nenner quadrirt werden.

Demnach ist $\frac{4}{9}$ das Quadrat von $\frac{2}{3}$ und $\frac{16}{25}$ das Quadrat von $\frac{4}{5}$.

135.

Also umgekehrt: soll die Quadratwurzel aus einem Bruch gezogen werden, so muß sowohl die Wurzel aus dem Zähler, als aus dem Nenner gezogen werden.

Folglich ist $\frac{3}{4}$ die Wurzel von $\frac{9}{16}$, weil 3 die Wurzel von 9 und 4 die Wurzel von 16 ist.

136.

Es kann sich aber ereignen, daß entweder der Zähler oder der Nenner, oder auch wohl beyde zugleich kein vollkommenes Quadrat sind. Dann ziehe man, wenn bloß der Zähler kein vollkommenes Quadrat ist, aus demselben, nach der so eben gezeigten Art, die genäherte Wurzel, und gebe dieser die Wurzel des Nenners zum Nenner.

Soll z. B. die Wurzel aus $\frac{2}{9}$ gezogen werden, so ziehe man aus 2 die genäherte Wurzel, wodurch man 1,4, oder 1,41, oder 1,414, oder 1,4142 u. s. w. nachdem man sich ihr mehr oder weniger nähern will, erhält. Da nun 3 die Quadratwurzel von 9 ist, so wird die genäherte Wurzel von $\frac{2}{9}$ durch $\frac{1,3}{3}$ oder $\frac{1,41}{3}$ oder $\frac{1,414}{3}$ oder $\frac{1,4142}{3}$ u. s. w. bestimmt.

Ist aber der Nenner kein Quadrat, so multiplicire man beyde Glieder des Bruchs mit diesem Nenner, welches den Werth des Bruchs in nichts verändert, den Nenner aber zum Quadrat macht, und verfahre sodann, wie bey dem vorhergehenden Fall.

Soll z. B. die Quadratwurzel aus $\frac{3}{5}$ gezogen werden, so verwandle man den Bruch in $\frac{15}{25}$. Ziehet man nun die Wurzel z. B. bis auf 3 Decimalstellen aus 15; so erhält man 3,872. Da nun 5 die Quadratwurzel aus 25 ist, so muß $\frac{3,872}{5}$ die Quadratwurzel aus $\frac{15}{25}$ oder $\frac{3}{5}$ seyn.

Damit nun nicht in einer und derselben Zahl so verschiedene Arten von Brüchen vorkommen: so verwandle man das Resultat $\frac{3,872}{5}$ in lauter Decimalbrüche, indem man 3,872 durch 5 dividirt. Dann entstehet (nach §. 92) 0,774 zur Wurzel von $\frac{3}{5}$, bloß in Decimalbrüche.

137.

Wären endlich ganze Zahlen bey einem Bruch, so verwandle man dieselbe (nach §. 80) in die Art des ihnen zugehörigen Bruchs, und ziehe sodann, wie vorher, aus diesem Bruch die Quadratwurzel.

So z. B. verwandle man, wenn aus $8\frac{3}{7}$ die Quadratwurzel gezogen werden soll, $8\frac{3}{7}$ in $\frac{59}{7}$ und diese wieder (nach §. 136) in $\frac{413}{49}$ und ziehe sodann aus diesem Bruch die genäherte Wurzel wodurch man $\frac{20,323}{7}$ oder 2,903 erhält.

138.

Indessen kann man auch den bey einer großen Zahl befindlichen Bruch in einen Decimalbruch verwandeln; man bemerke aber sodann, daß die Anzahl der Decimalstellen jederzeit gerade und doppelt so groß seyn muß, als die Anzahl der verlangten Decimalwurzelzahlen. Denn da, (nach 54) in ein jedes Product mit Decimalstellen eben so viel Decimalstellen kommen müssen, als in beyden Factoren befindlich

erstern Ziffern des Quotienten seyn sollen, man dieses nicht wahrnimmt, weil man in der Division die Nullen, welche den Quotienten zur Linken vorhergehen sollen, nicht bemerkt. Das Mittel, diesen Fall zu unterscheiden, ist dieses, daß man immer im Quotienten so viel Ziffern haben muß, als man davon an das Ende des Restes gesetzt hat; und wären daher weniger darin, so muß man die Zahl davon durch zur Linken des Quotienten gesetzte Nullen vollzählig machen.

Uebrigens ist die gezeigte Verkürzung eine Folge dieses allgemeinen Princips, welches leicht aus dem, was wir §. 128 gehabt haben, abgeleitet wird; nemlich: daß das Quadrat einer beliebigen aus zwey Theilen bestehenden Größe, das Quadrat des ersten Theils, das doppelte Product des ersten Theils in den zweyten, und das Quadrat des zweyten Theils, enthält. In der Algebra wird sich dieses leicht begreiflich machen.

Von der Formirung der Cubiczahlen und der Ausziehung ihrer Wurzel.

140.

Um den Cubus einer Zahl zu formiren, muß man erst die Zahl mit sich selbst und sodann das entstandene Product mit derselben Zahl multipliciren. Demnach ist, eigentlich zu reden, der Cubus einer Zahl nichts anders, als das Product, welches entstehet, wenn eine Zahl mit ihrem Quadrate multiplicirt worden ist. Folglich ist 27 der Cubus von 3, weil 27 aus der Multiplication der Zahl 3 mit ihrem Quadrat 9 entstanden ist. Da also die zu cubirende Zahl dreymal Factor bey einem Cubus ist, so wird der Cubus auch die dritte Potenz, oder der dritte Grad dieser Zahl genannt.

141.

141.

Allgemein sagt man, daß eine Zahl zur zweyten, dritten, vierten Potenz erhoben worden sey, wenn sie 2, 3, 4 u. s. w. auf einander folgende mal mit sich selbst multiplicirt worden ist, oder, wenn sie 2, 3, 4 u. s. w. mal Factor des Products gewesen ist.

142.

Eine Cubicwurzel eines gegebenen Cubus ist die Zahl, welche, wenn sie mit ihrem Quadrat multiplicirt wird, diesen Cubus hervorbringt. Also ist 3 die Cubicwurzel von 27.

143.

Demnach bedarf es, eine Zahl zu cubiren, keiner Anweisung. Soll aber aus einem Cubus die Wurzel gezogen werden, so sind Regeln nothwendig, die wir aus der Entstehung eines Cubus ziehen wollen.

Doch wollen wir vorher bemerken, daß, wenn die Cubicwurzel aus einer Zahl bloß in ganzen Zahlen gezogen werden soll, und diese Zahl bestehet aus weniger denn 4 Ziffern, diese Operation noch keiner Regel bedürfe. Denn da 1000 der Cubus von 10 ist, so muß auch die Wurzel jeder Zahl, die unter 1000 ist, und also weniger, denn 4 Ziffern enthält, auch unter 10 seyn, und folglich weniger als 2 Ziffern enthalten.

Demnach muß die Cubicwurzel einer jeden Zahl, welche zwischen zwey Zahlen der folgenden ersten Reihe gehöret

1. 8. 27. 64. 125. 216. 343. 512. 729.
1. 2. 3. 4. 5. 6 7. 8. 9.

auch zwischen zwey Zahlen fallen, die gleiche Stellen mit denen in der zweyten Reihe einnehmen, weil die Zahlen der ersten Reihe die Cuben von den Zahlen der zweyten Reihe sind.

144.

Es ist nicht jederzeit möglich, die wahre Cubicwurzel einer jeden gegebenen Zahl zu bestimmen; doch kann man durch Näherung Wurzeln finden, die, wenn sie nach und nach cubirt werden, sich auch mehr der gegebenen Zahl nähern. Und von dieser Näherung werden wir in der Folge handeln; zuvor aber zeigen, wie man die Cubicwurzel aus einem vollkommenen Cubus ziehen soll.

145.

Deshalb wollen wir untersuchen, aus was für Theilen der Cubus einer Zahl, die bloß aus Zehnern und Einheiten bestehet, zusammengesetzt ist.

Da der Cubus entstehet, wenn das Quadrat einer Zahl mit derselben Zahl multiplicirt wird; so ist nothwendig, daß man sich hier an die Theile (§. 127) des Quadrats einer Zahl, die aus Zehnern und Einheiten zusammengesetzt ist, wiederum erinnre. Diese waren nemlich 1) das Quadrat der Zehner, 2) das zweyfache Product der Zehner in die Einheiten, und 3) das Quadrat der Einheiten.

Demnach müssen, um den Cubus dieser Zahl zu formiren, diese 3 Theile mit den Zehnern nnd Einheiten der Zahl multiplicirt werden.

Damit nun die aus dieser Multiplication entstandenen Producte recht deutlich in die Augen fallen; so wollen wir die Entstehung eines Cubus unter folgender Gestalt vorstellen.

1.

Das Quadrat der Zehner.
Zweyfaches Product der Zehner in die Einheiten.
Das Quadrat der Einheiten.

Werden diese Producte mit den Zehnern multiplicirt, so entstehen.

Der Cubus der Zehner.
Das zweyfache Product von dem Quadrat der Zehner in die Einheiten.
Das Product der Zehner in das Quadrat der Einheiten.

2.

Das Quadrat der Zehner.
Das zweyfache Product der Zehner in die Einheiten.
Das Quadrat der Einheiten.

Werden diese Producte mit den Einheiten multiplicirt, so entstehen:

Das Product des Quadrats der Zehner in die Einheiten.
Das zweyfache Product der Zehner in das Quadrat der Einheiten.
Der Cubus der Einheiten.

Hieraus erhellet, daß, wenn die sechs entstandenen Theile zusammen genommen, und die einander ähnlichen addirt werden, der Cubus einer aus Zehnern und Einheiten bestehenden Zahl aus 4 Theilen zusammengesetzt sey: nemlich 1) aus dem Cubus der Zehner, 2) aus dem dreyfachen Product des Quadrats der Zehner in die Einheiten, 3) aus dem dreyfachen Product des Quadrats der Einheiten in die Zehner, und 4) aus dem Cubus der Einheit.

Nach diesen Sätzen wollen wir den Cubus einer Zahl, die aus Zehnern und Einheiten besteht, z. B. der Zahl 43, zusammen setzen.

Cubus der Zehner	64000
Dreyfaches Product der Zehner in die Einheiten	14400
Dreyfaches Product von dem Quadrat der Einheiten in die Zehner	1080
Cubus der Einheiten	27
	79507

Dem zufolge cubiren wir 4, wodurch 64 entsteht. Da diese 4 aber Zehner sind und 1000 der Cubus von 10 ist, so muß auch der Cubus von 4 in die Tausende fallen, und folglich 64000 seyn.

Ferner nehmen wir das Quadrat der 4 Zehner, welches 16 ist, 3mal, und multipliciren dieses Product mit den 3 Einheiten, wodurch wir, weil 100 das Quadrat von 10 ist, 144 Hunderte erhalten. Mithin muß dieses Product 14400 seyn.

Hierauf nehmen wir das Quadrat der Einheiten 3 mal, multipliciren das entstandene Product mit den 4 Zehnern, wodurch Zehner entstehen müssen, und folglich muß dieses Product 1080 seyn.

Endlich nehmen wir den Cubus der Einheiten, der 27 Einheiten enthält.

Addiren wir nun die 4 Theile zusammen, so erhalten wir 79507 für den Cubus von 43.

Diesem Cubus hätte man freylich viel leichter gefunden, wenn 43 mit 43 und das Product 1849 wiederum mit 43 multiplicirt worden wäre. Wir wollen aber hier nicht den Cubus, sondern die Theile, aus welchen er zusammengesetzt ist, kennen lernen, welche Kenntniß uns zur Ausziehung der Wurzel sehr nothwendig ist.

146.

Dies voraus gesetzt, so soll folgendes Beyspiel zeigen, wie die Cubicwurzel aus einer gegebenen Zahl gezogen wird.

Die Zahl 79507 sey gegeben, man soll ihre Cubicwurzel bestimmen.

	Cubus	Wurzel
	79 | 507)	43
Cubus der Zehner	64	
	15 | 507	
Das dreyfache Quad. d. Zehner	4 | 8	
Das dreyf. Quadr. der Zehn. ✕ Einheiten	14 | 4	
Das dreyf. Quad. der Einheiten ✕ Zehner	1 | 08	
Cubus der Einheiten	| 27	
	15 | 507	

Man suche erst den Theil von dieser Zahl, der den Cubus der Zehner enthält, und trenne deshalb von derselben die drey letzten Ziffern, in welcher dieser Cubus, wie wir so eben gesehen haben, nicht enthalten seyn kann, weil er in die Tausende fällt.

Hierauf bestimme man die Cubicwurzel von 79, die 4 ist, und schreibe diese der gegebenen Zahl zur Seite. Nun cubire man diese 4, und ziehe den Cubus 64 von 79 ab, so bleiben 15, welche unter die 79 geschrieben werden.

Dieser 15 zur Seite setze man 507 herunter, wodurch 15507 entsteht, in welchen die Summe der folgenden 3 Producte, nemlich: das dreyfache Quadrat der Zehner in die Einheiten, das dreyfache Quadrat der Einheiten in die Zehner und der Cubus der Einheiten, enthalten ist.

Nun trenne man die beiden letzten Ziffern 07, dann bleibt in dem Theile linker Hand das dreyfache Quadrat der Zehner multipliciret mit den Einheiten. Mithin dividire man, um die Einheiten zu erhalten (§. 67), mit dem dreyfachen Quadrat der Zehner 4, das ist, mit 48 in 155 und setze, da 48 in 155 dreymal enthalten ist, 3 in die Stelle der Einheiten von der Wurzel.

Wollte man sich nun von der Richtigkeit dieser Wurzel überzeugen, so kann man entweder 43 cubiren und den Cubus von der gegebenen Cubiczahl abziehen, oder man kann die in 15507 enthaltenen 3 Theile addiren und von 15507 abziehen, wo man denn bey beyderley Methoden finden wird, daß 79507 ein vollkommener Cubus und 43 die Wurzel sey.

Sind hingegen mehr als 6 Ziffern in der gegebenen Zahl enthalten, so verfahre man nach der Erklärung des folgenden Beyspiels.

Zweites Beyspiel.

Die Zahl 596947688 wird gegeben, man soll ihre Cubicwurzel bestimmen.

			Wurzel.
	596	947	688) 842
Cubus der Zehner	512		
	84	947	
Das reifache Quad. der Zehner	19	2	
Das 3fache Quad. d. Zehn. × d. Einheit	76	8	
" " der Einheiten × der Zehner	3	84	
Der Cubus der Einheiten		64	
	80	704	
	4	243	6,88
Das 3fache Quad. der Zehn. 84	2	116	8
" " " d. Z. 84 × d. Einh. 2;	4	233	6
" " d. Einh. 2 × d. Zehner 84;		10	08
Der Cubus der Einheiten 2;			8
	4	243	688

Man betrachte die zu bestimmende Wurzel als wenn sie aus Zehnern und Einheiten bestände, und schneide dem zu folge von der gegebenen Zahl 3 Ziffern ab. Da aber der Theil 596947, in welchem der Cubus der Zehner enthalten seyn soll, aus mehr als 3 Ziffern bestehet; so muß auch zur Wurzel der

Zehner mehr als eine Ziffer gehören, und mithin dieselbe wieder= um Zehner und Einheiten enthalten. Demnach müssen um den Cubus von diesen Zehnern zu bestimmen, die 3 Ziffern 947 ab= geschnitten werden.

Dies vorausgesetzt, suche man nun die Cubicwurzel von 596, welche in 8 gefunden wird, schreibe sie der gegebenen Zahl zur Seite, und ziehe ihren gefundenen Cubus 512 von 596 ab; dann bleibt 84 zum Rest, der unter 596 geschrieben werden muß. Ferner setze man diesen 84 zur Seite 947 herunter, wodurch 84947 entstehet, von welchen die beiden letzten Ziffern abgeschnitten werden müssen. Nun schreibe man unter den Theil 849 das 3fache Quadrat der Wurzel 8, nemlich 192, und dividire mit demselben in 849, wodurch 4 zum Quotienten entstehet, welche der Wurzel 8 zur Seite geschrieben werden.

Um sich aber von der Richtigkeit dieser Wurzel zu überzeugen und zugleich den Rest zu erfahren, cubire man entweder 84 und ziehe den Cubus 592704 von der Zahl 596947 ab, oder man addire die hier oben zu sehenden, noch in 84947 enthaltenen 3 Theile, und ziehe ihre Summe 80704 ab, wo dann nach bei= derley Art 4243 zum Rest bleiben.

Nun setze man zu diesem Rest den Abschnitt 688 herunter, betrachte sodann die Wurzel 84 als eine Zahl, welche bloß die Zehner der Wurzel anzeiget, und schneide von der Zahl 4243688 die beiden letzten Ziffern ab. Hierauf dividire man den Theil 42436 durch das 3fache Quadrat von 84, nemlich durch 21168; dann findet man 2 zum Quotienten, welche der Wurzel 84 zur Seite geschrieben werden.

Will man endlich erfahren, ob die Wurzel 842 richtig sey, und ob sie einen Rest lasse, so cubire man entweder 842 und ziehe den gefundenen Cubus 596947688 von der gegebenen Zahl 596947688 ab. Oder man addire die in 4243688 enthaltenen 3 Theile und ziehe ihre Summe 4243688 ab. Man findet dann, da nach beyderlei Art kein Rest bleibt, daß 843 die wahre Cubic= wurzel von 596947688 seyn müsse

Es ist aber noch zu bemerken, 1) daß nie eine größere Zahl als 9 auf einmal zur Wurzel geschrieben werden

kann, 2) daß, wenn eine Ziffer der Wurzel zu groß angenommen seyn sollte, man sich hiervon leicht durch die Subtraction überzeugen könne, welche sodann nicht möglich ist. Demnach vermindre man in diesem Fall die Wurzel nach und nach um 1, 2, 3, u. s. w. Einheiten, bis das die Subtraction geschehen kann.

147.

Sollte die gegebene Zahl aber kein vollkommener Cubus seyn, so ist die also entstandene Wurzel bloß die genäherte, und es ereignet sich selten, daß man sich sodann mit einer Wurzel in ganzen Zahlen begnügen lassen könne. Hier leisten nun wiederum die Decimalbrüche die vortrefflichsten Dienste, weil man mit Hülfe derselben der Wurzel so nahe kommt, als verlangt wird, dessenungeachtet aber dieselbe niemals genau bestimmt. Um nun der wahren Cubicwurzel eines unvollkommenen Cubus sich so genau, als verlangt wird, zu nähern, hängt man an die gegebene Zahl 3mal so viel Nullen an, als die Wurzel Decimalstellen haben soll. Sodann ziehe man aus der ganzen Zahl auf vorgezeigte Art die Cubicwurzel und schneide nach vollendeter Rechnung durch ein Komma zur Rechten der Wurzel so viel Zahlen ab, als Decimalstellen verlangt worden sind.

Beyspiel.

Man verlangt die Cubicwurzel bis auf ein Hunderttheilchen von 8755 zu wissen. Da Hundertheile in der Wurzel vorkommen sollen, so werden zwei Decimalstellen in derselben verlangt, und folglich müssen 6 Nullen an 8755 gehängt werden.

Demnach ist die Aufgabe jetzt folgendergestalt vorzutragen. Es soll aus 875500000 die Cubicwurzel gezogen werden.

					Wurzel.
	8	755	000	000)	20,61
Cubus der Zehner 2 =	8				
		755			
3fache Quad. der Zehner 2 =	1	2			
		755	000		
: : von 20 =		120	0		
3fach. Q. d. Zeh. × d. Einh. 6 =	21	720	0		
: : : Einh. × d. Zeh. 20 =		21	62		
Cubus der Einheiten 6 =			216		
		741	816		
		13	184	000	
3faches Quadrat der Zeh. 206 =			127308		

Dem Vorhergehenden zufolge, theile man die gegebene Zahl von der Rechten zur Linken in Abschnitte, von welchen ein jeder 3 Ziffern enthält. Hierauf ziehe man aus der Ziffer 8 des letzten Abschnitts die Cubicwurzel, welche 2. ist, setze sie an die Seite der gegebenen Zahl, cubire sie und ziehe den Cubus 8 von 8 ab; dann bleibt 0. Dieser Null zur Seite setze man 755 herunter, schneide von dieser Zahl die beyden letztern Ziffern 55 ab, uud setze 12, nemlich das 3fache Quadrat der Wurzel 2, unter den andern Theil 7. Sodann dividire man 7 durch 12, wodurch man 0 zum Quotienten erhält, welche der Wurzel 2 zur Seite geschrieben wird. Da nun die Null als Factor betrachtet, im Product nichts anders als Nullen geben kann, so kann auch die Summe der in 755 enthaltenen drey Theile nichts anders als Nullen hervorbringen; mithin muß derselbe, von 755 abgezogen, 755 zum Rest lassen.

Nun setze man der Zahl 755 zur Seite 000, schneide von der Zahl 755000 zwei Nullen ab, und setze 1200, nemlich das dreifache Quadrat von 20, unter den Theil 7550. Ferner dividire man diese Zahl durch 1200, wodurch 6 zum Quotienten entstehet, der hinten an die Wurzel 20 geschrieben wird. Hierauf bestimme man die in 755000 enthaltenen 3 Theile des Cubus, wie oben zu sehen ist, addire und ziehe die Summe 741816 von 755000 ab; dann bleiben 13184 zum Rest.

Endlich rücke man dem Rest 13184 den letzten Abschnitt 000 zur Seite herunter, schneide von demselbem die beiden letzten Nullen ab, und setze 127308, nemlich das 3fache Quadrat der Zehner 206, unter den andern Theil 131840. Sodann dividire man 131840 durch 127308, wodurch 1 zum Quotienten entstehet, welche zu der Wurzel 206 geschrieben wird. Bestimmt man nun die in 13184000 enthaltenen 3 Theile des Cubus und ziehet ihre Summe 12736981 von 13184000 ab; so bleiben 447019 zum Rest.

Demnach ist 2061 die genäherte Cubicwurzel von 8755000000. Da aber 8755000000 Millionenmal größer ist, als 8755, so muß auch die Wurzel der ersten Zahl 100mal größer als die von 8755 seyn, weil 1000000 der Cubus von 100 ist. Folglich bestimmt 20,61 die Cubicwurzel von 8755.

Will man sich aber der wahren Cubicwurzel mehr nähern, so hänge man dem Rest noch 3 Nullen an, und verfahre übrigens, wie bei einem jeden heruntergesetzten Abschnitt.

148.

Da, wenn Brüche mit einander multipliciret werden sollen, Zähler mit Zähler und Nenner mit Nenner multiplicirt werden, so muß auch, wenn ein Bruch cubirt werden soll, sowohl der Zähler als Nenner cubirt werden. Soll also umgekehrt die Cubicwurzel aus einem Bruch gezogen werden, so muß dieses sowohl aus dem Zähler als aus dem Nenner geschehen. Folglich muß aus $\frac{27}{64}$ die Cubicwurzel $\frac{3}{4}$ sein, weil 3 die Cubicwurzel aus 27 und 4 aus 64 ist.

149.

Ereignet es sich nun, daß der Nenner nur allein ein Cubus ist, so ziehe man aus dem Zähler die genäherte

Cubicwurzel, und gebe derselben die Cubicwurzel des Nenners zum Nenner.

Soll z. B. aus $\frac{143}{343}$ die Cubicwurzel gezogen werden, so ziehe man aus dem Zähler, der kein Cubus ist, die genäherte Wurzel, welche bis auf ein Hunderttheilchen 5,22 gefunden wird. Da nun 7 die Cubicwurzel aus 343 ist, so erhält man $\frac{5,22}{7}$ zur genäherten Wurzel von $\frac{143}{343}$. Verwandelt man diese nun (nach §. 92) in einen Decimalbruch, so bestimmt 0,74 die bis auf ein Hunderttheil genäherte Wurzel.

150.

Ist aber der Nenner kein Cubus, so multiplicire man die beiden Glieder des Bruchs mit dem Quadrat des Nenners, wodurch der Nenner ein Cubus wird, und beobachte hierbey das oben gezeigte Verfahren.

Soll z. B. die Cubicwurzel aus $\frac{3}{7}$ gezogen werden; so multiplicire man Zähler und Nenner mit 49, dem Quadrat von 7, so entstehet $\frac{147}{343}$, welcher Bruch mit $\frac{3}{7}$ von gleichem Werthe ist. Ferner ziehe man aus $\frac{147}{343}$ die Cubicwurzel, so erhält man $\frac{147}{7}$ oder 0,75 bloß in zehntheiligen Zahlen bestimmt. Folglich ist 0,75 die bis auf ein Hunderttheilchen genäherte Cubicwurzel von $\frac{3}{7}$.

Hingegen, wenn Ganze bey einem Bruch befindlich sind, so muß alles in einen Bruch verwandelt und sodann nach den (148 und folg.) gegebenen Regeln, welche für die aus einem Bruch zu ziehende Cubicwurzel gegeben sind, verfahren werden.

Man kann auch aus einem Bruch, sowohl wenn Ganze dabey befindlich sind, als ohne dieselben, die Cubicwurzel ziehen, wenn man zuvor den Bruch in einen zehntheiligen verwandelt und sodann aus den letztern die Cubicwurzel ziehet. Man muß aber bey der Verwnadlung Sorge tragen, dreimal so viel zehnthei-

lige Ziffern, als in der Wurzel verlangt werden, hervor zu bringen.

Wird also von $7\frac{3}{111}$ die genäherte Cubicwurzel bis auf ein Tausendtheilchen verlangt; so verwandele man den Bruch $\frac{3}{111}$ in 0,272727272, daß also anstatt die Wurzel aus $7\frac{3}{111}$ zu ziehen dieselbe aus 7,272727272, gezogen werde, die sodann 1,437 ist.

151.

Soll die Cubicwurzel aus einer zehntheiligen Zahl gezogen werden, so hängt man derselben eine hinlängliche Anzahl Nullen an, dergestalt, daß die Menge der zehntheiligen Ziffern entweder 3 oder 6, oder 9 u. s. w. sey. Sodann ziehe man die Cubicwurzel aus, ohne auf das Komma zu achten, und schneide hierauf von der Wurzel zur rechten den dritten Theil von den zehntheiligen Ziffern der gegebenen Zahl durch ein Komma ab. Sollten aber in der Wurzel nicht Ziffern genug seyn, um die vorhergehenden Regeln in Ausübung zu bringen, so ersetze man dieselbe durch Nullen, welche der Wurzel zur Linken geschrieben werden.

Soll also die Cubicwurzel aus 6,54 bis auf ein Tausendtheilchen gezogen werden; so hänge man an 6,54 sieben Nullen an, und ziehe also aus, 6,54000000 die Cubicwurzel, welche 1870 ist. Da nun 9 zehntheilige Ziffern im Cubus befindlich sind, so schneide man von der Wurzel 3 Ziffern durch ein Komma ab, wodurch 1,870 oder 1,87 zur Cubicwurzel von 6,54, entstehet. Eben so findet man, daß die Cubicwurzel von 0,0052 bis auf ein Zehntausendtheilchen 0,1732 sey.

Um die beiden vorhergehenden Rechnungsarten anzeigen zu können, wollen wir uns der folgenden Zei-

chen ($\sqrt{}$) und ($\sqrt[3]{}$) bedienen. Demnach heißt $\sqrt[25]{}$, daß aus der Größe 25 die Quadratwurzel und $\sqrt[3]{125}$, daß aus der Größe 125 die Cubicwurzel gezogen werden soll.

I. Wenn man die vier ersten Ziffern von der Cubicwurzel durch die eben gezeigte Methode gefunden hat, so kann man die übrigen schneller finden, wie folget.

Aus 5264627832723456 soll die Cubicwurzel gezogen werden. Man suche also davon, durch die gewöhnliche Methode die vier ersten Ziffern 1739, und der Rest bey dieser Operation ist 5681413; diesem Reste zur Seite setze ich die zwey Ziffern 72 die dem Theil 5264627832, welcher die vier ersten Ziffern gegeben hat, folgen. (Man würde die drey Ziffern, die diesem Theile folgen setzen, wenn die gefundene Wurzel fünf Ziffern, und die vier folgenden, wenn die Wurzel sechs Ziffern hätte). Man dividire 568141372 durch 9072363, das dreyfache von der Wurzel 1739. Der Quotient 62 enthält zwei neue zu Ende von 1739 zu setzende Ziffern, so daß 173962 in ganzen Zahlen die Cubicwurzel der vorgegebenen Zahl ist.

II. Wollte man die Rechnung weiter treiben, so muß man diese Wurzel cubiren, und das Resultat von der vorgegebenen Zahl abziehen, dem Reste vier Nullen anhängen, und das Ganze mit dem dreyfachen Quadrat von 173962 dividiren. Dadurch erhält man vier Decimalstellen für die Wurzel.

III. Für den Fall wo die Division nicht so viel Ziffern giebt, als sie deren geben soll, muß man hier dasselbe wie Seite 143. beobachten. Und bei diesen Divisionen bedient man sich der, Seite 56 u. f.) gezeigten Divisionen.

Beyspiele für Quadrat und Cubiczahlen nebst ihrer Wurzel.

Man bezeichnet das Quadrat einer Ziffer durch eine oben rechter Hand der Zahl geschriebene kleine 2 und den Cubus durch eine kleine 3, so ist

$10^2 = 100$
$90^2 = 1800$
$100^2 = 10000$
$900^2 = 810000$
$1000^2 = 1000000$
$9000^2 = 81000000$
u. s. w.

$0,1^2 = 0,01$
$0,9^2 = 0,81$
$0,01^2 = 0,0001$
$0,09^2 = 0,0081$
$0,001^2 = 0,000001$
$0,009^2 = 0,000081$
u. s. w.

Diese Beyspiele genau durchdacht geben zu mancher nützlichen Bemerkung Anlaß.

$4,6^2 = (4 + 0,6)^2 = 4^2 + 0,6^2 = 21,16$
$463^2 = (460 + 3)^2 = 460^2 + 2.460.3 + 3^2 = 214369$
$4,63^2 = (6,4 + 0,03)^2 = 4,6^2 + 2.4,6.0,03 + 0,03^2\ 21,4369$

$$\left(\frac{35}{64}\right)^2 = \frac{35^2}{64^2} = \frac{(30+5)^2}{(60+4)^2} = \frac{30^2 + 2.30.5 + 5^2}{60^2 + 2.60.4 + 4^2}$$

$$= \frac{1225}{4096}$$

$$\left(\frac{126}{312}\right)^2 = \frac{226^2}{312^2} = \frac{15876}{97344}$$

$\sqrt{0,970225} = 0,985$; $\sqrt{2150,1769} = 46,37$;
$\sqrt{63504000000} = 252000$; $\sqrt{0,000000080125} = 0,000895$;

$$\sqrt{\frac{2916}{440896}} = \frac{\sqrt{2916}}{\sqrt{440896}} = \frac{54}{664} = \frac{27}{332}$$

$$\sqrt{\frac{262144}{64}}\ \frac{\sqrt{261244}}{\sqrt{64}} = \frac{54}{664} = \frac{27}{332}$$

$$\sqrt{\frac{262144}{64}} = \frac{\sqrt{262144}}{\sqrt{64}} = \frac{412}{8} = 64$$

$10^3 = 1000$
$90^3 = 729000$
$100^3 = 1000000$
$900^3 = 729000000$
$1000^3 = 1000000000$
$9000^3 = 729000000000$
u. s. w.

$0,1^3 = 0,001$
$0,9^3 = 0,729$
$0,01^3 = 0,000001$
$0,09^3 = 0,000729$
$0,001^3 = 0,000000001$
$0,009^3 = 0,000000729$
u. s. w.

$(4,6)^3 = (4 + 0,6)^3 = 4^3 + 3.4^2.0,6 + 3.4.0,6^2 + 0,6$
$= 97,336$

$$463^3 = (460 + 3)^3$$
$$= 460^3 + 3.460^2 . 3 + 3.460 . 3^2 + 3^3$$

$$\left(\frac{85}{476}\right)^3 = \frac{85^3}{476^3} = \frac{614225}{107850176};$$

$$\sqrt[3]{444194,947} = 76,3 : \sqrt[3]{0,311665752} = 0,678$$

$$\sqrt{\frac{1331}{1728}} = \frac{\sqrt[3]{1331}}{\sqrt[3]{1728}} = \frac{11}{12};$$

$$\frac{\sqrt[3]{4913}}{\sqrt[3]{2248091}} = \frac{17}{131}; \quad \sqrt[3]{\frac{512}{8000}}$$

$$= \sqrt[3]{0,64} = 0,4$$

Von den Verhältnissen, Proportionen, Progressionen und einigen davon abhängenden Regeln.

152.

Das Wort Verhältniß drückt das Resultat der Vergleichung zweyer Größen aus.

153.

Werden zwey Größen mit einander verglichen und man will wissen, wie viel die eine Größe die andere übertrift oder von derselben übertroffen wird, so wird diese Vergleichung ein arithmetisches Verhältniß und der Unterschied dieser beiden Größen der Name des arithmetischen Verhältnisses genannt.

Vergleicht man also 15 mit 8, um ihre Differenz zu wissen, so wird diese Beziehung der beyden Größen gegeneinander ihr arithmetisches Verhältniß, und die Zahl 7, oder das Resultat der Vergleichung der Name des arithmetischen Verhältnisses von 15 zu 8 genannt.

Um nun ein arithmetisches Verhältniß zu bezeichnen, scheide man beyde Größen durch einen Strich von einander, daß also 15 — 8 anzeigt, daß das arithmetische Verhältniß dieser beyden Größen in Erwägung genommen wird.

154.

Will man bey der Vergleichung zweier Größen erfahren, wie oft die eine Größe die andere enthält oder darinnen enthalten ist, so wird diese Beziehung der Größen gegen einander, ihr geometrisches Verhältniß, und das Resultat dieser Vergleichung der Exponent des Verhältnisses dieser beyden Größen genannt.

Vergleicht man z. B, 12 mit 3, um zu wissen, wie oft 3 in 12 enthalten ist, so ist 12 zu 3 ein geometrisches Verhältniß, und die Zahl 4, welche anzeiget, wie oft dieses geschiehet, der Exponent desselben Verhältnisses.

Diese Art von Vergleichung zu bezeichnen, scheide man beyde Größen durch 2 Puncte von einander.

Demnach deutet 12 : 3 das geometrische Verhältniß von 12 zu 3 an.

155.

Von zweyen mit einander zu vergleichenden Größen wird die zuerst ausgesprochene oder geschriebene die vordere und die andere die hintere genannt.

Also

Also ist in dem Verhältniß 12: 3, 12 die vordere und 3 die hintere Größe. Beyde Größen aber werden allgemein die Glieder des Verhältnisses genannt.

156.

Um den Namen des arithmetischen Verhältnisses zweyer Größen zu bestimmen, darf man bloß die kleinere von der größern abziehen.

157.

Um den Exponenten des geometrischen Verhältnisses zu bestimmen, muß man die eine Größe durch die andere dividiren.

158.

Zur deutlichen Bestimmung dieses Exponenten wollen wir annehmen, daß das vordere Glied durch das hintere dividiret werden soll.

Demnach ist 4 der Exponent von 12: und $_{12}^{3}$ oder $\frac{1}{4}$ von 3: 12.

159.

Ein arithmetisches Verhältniß wird in nichts verändert, wenn zu einem jedem Gliede eine gleiche Größe addirt, oder, von einem jedem Gliede eine gleiche Größe subtrahiret wird, weil der Name des Verhältnisses in allen diesen Fällen derselbe bleibt.

160.

Eben so wird ein geometrisches Verhältniß in nichts verändert, wenn dessen Glieder durch eine gleiche Zahl multiplicirt oder dividirt werden. Denn der Exponent des geometrischen Verhältnisses wird

(nach §. 151) bestimmt, wenn das vordere Glied durch das hintere dividirt wird, wodurch aber eine gebrochene Größe entstehet, die, wenn ihre beyden Glieder durch einerley Zahl multiplicirt werden, in nichts verändert wird.

Mithin sind die beyden Verhältnisse 3 : 12 und 6 : 24 einander gleich, und ein jedes derselben gleich dem Verhältniß 1 : 4. Denn beyde Glieder des ersten Verhältnisses mit 2 multiplicirt, geben 6 : 24, uud beyde Glieder des ersten Verhältnisses durch 3 dividirt, geben 1 : 4.

161.

Diese Eigenschaft der Verhältnisse dient dazu, ein in Brüchen gegebenes Verhältniß in ein Verhältniß ganzer Zahlen zu verwandeln. So z. B. wenn das Verhältniß von der Länge zweyer Artilleriestücke, deren einer $3\frac{2}{3}$ Fuß und der andere $4\frac{3}{4}$ Fuß lang ist, auf das einfachste ausgedrückt werden soll, so ist offenbar, daß $3\frac{2}{3} : 4\frac{3}{4}$ dem Verhältniß $\frac{11}{3} : \frac{19}{4}$ gleich ist: weil die Ganzen der beyden Längen in Brüchen verwandelt worden sind. Ferner ist das Verhältniß $\frac{11}{3} : \frac{19}{4}$ gleich dem Verhältniß $\frac{44}{12} : \frac{57}{12}$ wo die Glieder auf gleiche Benennung gebracht worden sind: Letzteres Verhältniß aber ist dem 44 : 57 gleich, weil beyde vorhergehende Glieder mit 12 multiplicirt worden sind: Eben so findet man $36\frac{3}{4} : 24\frac{1}{2}$ $= \frac{147}{4} : \frac{49}{2} = \frac{147}{4} : \frac{98}{4} = 147 : 98$. Und endlich ist das Verhältniß 147 : 98 gleich dem Verhältniß 3 : 2, weil beyde Glieder des ersten Verhältnisses durch 49 dividirt das letztere hervorbrachten; welches aber das einfachste Verhältniß der beyden gegebenen Zahlen ist.

Nimmt man vier Größen dergestalt an, daß das Verhältniß der beyden ersten dem Verhältniß der beyden letztern gleich ist; so sagt man: diese 4 Größen formiren eine Proportion, die eine arithmetische oder geometrische heißt, nachdem die in denselben vorkommenden Verhältnissen arithmetisch oder geometrisch sind.

Die vier Größen 7, 9, 12, 14 formiren also eine arithmetische Proportion, weil von den beyden ersten Größen, die erste von der zweyten um eben so viel übertroffen wird, als von den beyden letzten Größen die erste von der zweyten.

Will man nun anzeigen, daß vier Größen in arithmetischer Proportion stehen; so schreibe man $7 - 9 = 12 - 14$, d. h., man trenne die beyden Glieder jedes verhältnisses durch einen Strich und die beyden Verhältnisse durch 2 Striche; dann deutet der eine Strich zu und die zwey Striche wie an, daß also eine nach vorhergehender Art geschriebene Proportion 7 zu 9 wie 12 zu 14 gesprochen wird.

Hingegen formiren die vier Größen 15, 3, 20, 4 eine geometrische Proportion, weil 3 eben so oft in 15 als 4 in 20 enthalten ist.

Will man nun die geometrische Proportion dieser vier Größen andeuten, so schreibe man $15 : 3 = 20 : 4$, d. h., ein jedes Verhältniß trenne man durch zwey Puncte, und die beyden Verhältnisse selbst durch zwey Striche. Dann bedeuten die beyden Puncte zu und die beyden Striche wie; daß man aiso sagt: 15 zu 3, wie 20 zu 4.

Die Geometer sind fast alle darin übereingekommen, unter den bloßen Worten, Verhältniß, Proportion, allemal geometrische Verhältnisse oder Proportionen zu verstehen, bey den arithmetischen wird jedesmal das Wort arithmetisch hinzugesetzt, so sagt man 7 arithmetisch zu 9 wie 12 zu 14.

163.

Das erste und letzte Glied Glied einer Proportion werden die äußern Glieder derselben, das zweyte und dritte Glied aber, die mittlern Glieder genannt.

Da in einer jeden Proportion zwey Verhältnisse, mithin zwey vordere und zwey hintere Glieder sind, so sagt man: das erste Verhältniß enthält das erste vordere und das erste hintere Glied, das 2te Verhältniß aber das zweyte vordere und das zweyte hintere Glied.

164.

Eine stetige Proportion heißt, wenn die mittlern Glieder einer Proportion einander gleich sind.

Also formiren die Größen $3 - 7 = 7 - 11$ eine stetige arithmetische Proportion, die folgendergestalt $\div\ 3 - 7 - 11$ geschrieben wird, dann bemerkt der mit den beyden Puncten vorhergehende Strich, daß das Glied 7 noch einmal wiederholt werden soll.

Hingegen ist $5 : 20 = 20 : 80$ eine stetige geometrische Proportion, die also $\dot{\div}\ 5 : 20 : 80$ geschrieben wird; und hier wird wiederum der mit den vier Puncten vorstehende Strich eben so wie bey der arithmetischen Proportion angewendet.

165.

Aus dem, was bisher von den arithmetischen Proportionen gesagt worden ist, folgt:

1) Daß, wenn man in einer arithmetischen Proportion den Unterschied der Glieder oder den Namen des Verhältnisses, entweder zu einem jeden der vordern Glieder addirt, oder von demselben subtrahirt nachdem das vordere Glied größer oder kleiner, als sein hinteres ist, jedes der vordern Glieder seinem hintern Gliede gleich werden müsse. Denn im ersten Fall wird den vordern Gliedern, das was ihnen fehlet, um ihren hintern Gliedern gleich zu werden, zugesetzt, und im zweyten Fall wird ihnen das, um welches sie ihre hintern Glieder übertreffen, abgenommen.

So addire man in der Proportion $3 - 7 = 8 - 12$ den Unterschied 4 zu dem ersten und dritten Gliede, dann entstehet $7 - 7 = 12 - 12$, und man begreift leicht, daß dieses allgemein geschiehet.

2) Daß, wenn in einer geometrischen Proportion jedes der hintern Glieder mit dem Exponenten der Proportion multiplicirt wird, dieselben ebenfalls ihren vordern Gliedern gleich werden müssen, weil, wenn man das hintere Glied mit dem Exponenten multiplicirt, dasselbe eben so oft, als es in dem vordern Gliede enthalten ist, genommen wird.

So multiplicire man in der Proportion $12 : 3 = 20 : 5$ die Glieder 3 und 5 mit 4, so erhält man $12 : 12 = 20 : 20$

und in der Proportion 15 : 9 = 45 : 27 die Glieder 9 und 27, jedes mit dem Exponenten $\frac{15}{9}$ oder $\frac{5}{3}$, so entstehet 15 : 15 = 45 : 45.

Von den Eigenschaften der arithmetischen Proportion.

166.

Die Haupteigenschaft der arithmetischen Proportion besteht darin, daß die Summe der äußern Glieder der Summe der mittlern gleich ist.

Wie z. B. in dieser Proportion 3 — 7 = 8 — 12 ist die Summe von 3 und 12 und die von 8 und 7, jede gleich 15.

Von der Allgemeinheit dieser Eigenschaften wollen wir uns folgendergestalt überzeugen.

Wenn die beyden ersten Glieder, desgleichen die beyden letztern in einer Proportion z. E. in dieser

$$7 — 7 = 12 — 12$$

einander gleich sind; so ist offenbar, daß die Summe der äußern Glieder der Summe der mittlern Glieder gleich seyn müsse.

Es kann aber eine jede arithmetische Proportion in diesen Zustand versetzt werden, wenn man (nach §. 165) die Differenz oder den Namen des Verhältnisses der Proportion entweder zu jedem vordern Gliede addirt, oder von demselben subtrahirt. Da nun diese Addition so wohl die Summe der äußern Glieder, als die Summe der mittlern Glieder um ein Gleiches vermehrt, so wird die Gleichheit der

Summen, wenn sie zuvor gleich gewesen sind, in nichts verändert. Sind nun diese Summen einander gleich; so begreift man leicht, daß sie es auch ohne die Addition gewesen seyn müssen. Eben so würde man, im Fall die Differenz abgezogen worden wäre, auch geschlossen haben.

167.

Aus dem Vorhergehenden erhellet nun, daß, weil in einer stetigen Proportion die mittlern Glieder einander gleich sind, die Summe der äußern Glieder dem doppelten mittlern Gliede, oder die halbe Summe der äußern Glieder dem mittlern Gliede gleich seyn müsse.

Werden also die beyden Zahlen 15 und 7 gegeben, und man soll ihre mittlere arithmetische Proportionalzahl finden; so addire man 15 und 7, welches 22 giebt, nehme davon die Hälfte, dann erhält man 11 für das mittlere Glied, und mithin ÷ 7 — 11 — 15.

Von den Eigenschaften der geometrischen Proportion.

168.

Die Haupteigenschaft einer geometrischen Proportion besteht darin, daß das Product der äußern Glieder dem Product der mittlern gleich ist.

Z. B. in der Proportion 3 : 15 = 7 : 35 ist das Product von 35 und 3 dem Product von 15 und 7 gleich, weil jedes derselben 105 ausmacht.

Daß diese Eigenschaft bey einer jeden Proportion statt findet; davon wollen wir uns folgendergestalt überzeugen.

Sind die vordern Glieder ihren hintern Gliedern gleich, wie in dieser Proportion

$$3 : 3 = 7 : 7;$$

so ist ganz offenbar, daß das Product der äußern Glieder dem Product der mittlern Glieder gleich seyn muß.

Man kann aber eine jede geometrische Proportion (nach §. 165) in diesen Zustand versetzen, wenn die beyden hintern Glieder mit dem Exponenten des Verhältnisses multiplicirt werden. Hierdurch wird zwar das Product der äußern Glieder um so vielmal größer, oder, wenn der Exponent ein Bruch gewesen ist, um so vielmal kleiner, als vorher; um eben so vielmal wird aber auch das Product der mittlern Glieder größer oder kleiner. Werden nun beyde Producte durch die Multiplication einander gleich, so siehet man leicht, daß sie es auch ohne dieselbe gewesen seyn würden. Demnach weiß man, wenn das Product der mittlern Glieder bekannt ist, auch das Product der äußern, und umgekehrt.

Hieraus folgt, daß in einer stetigen geometrischen Proportion das Product der äußern Glieder dem Quadrat des mittlern Gliedes gleich seyn muß, und daß folglich daß mittlere

Glied gefunden wird, wenn man aus dem Product der äußern Glieder die Quadratwurzel zieht.

Wird also zwischen 4 und 9 eine mittlere geometrische Proportionalzahl verlangt, so multiplirire man 4 mit 9, dann ist die aus dem Product gezogene Quadratwurzel die verlangte mittlere Proportionalzahl.

169.

Demnach müssen, wenn die drey ersten Glieder einer geometrischen Proportion bekannt sind, und das vierte bestimmt werden soll, das zweyte und dritte Glied mit einander multiplicirt, und dieses Product durch das erste dividirt werden. Denn das Product des zweyten und dritten Gliedes ist dem Producte des ersten und vierten Gliedes (nach §. 167) gleich. Ist aber das letzte Product bekannt, so ist (nach §. 168) offenbar, daß, wenn dasselbe durch das erste Glied dividirt wird, daß vierte Glied entstehen muß. Folglich muß das vierte Glied auch bestimmt werden, wenn das Product des zweyten und dritten Gliedes durch das erste Glied dividirt wird.

Soll also zu den drey folgenden Gliedern $3 : 8 = 12$ das vierte Proportionalglied bestimmt werden, so multiplicire man 8 mit 12, wodurch 96 entsteht und dividire das Product durch 3; dann erhält man 32 zum vierten Gliede. Demnach müssen 3, 8, 12, 32 in Proportion stehen, welches sich auch wirklich so verhält. Denn der Exponent der beyden ersten Glieder ist $\frac{3}{8}$ und der Exponent der beyden letzten ist $\frac{12}{32}$, welche Zahl, wenn beyde Glieder durch 4 dividirt werden, ebenfalls durch $\frac{3}{8}$ ausgedrückt wird.

Schließt man ferner auf eine ähnliche Art, so ist, wenn drey Glieder einer geometrischen Proportion be-

kannt sind, jedes fehlende vierte Glied leicht zu bestimmen. Wird eins der äußern Glieder verlangt; so multiplicire man die beyden mittlern Glieder und dividire dieses Product durch das bekannte äußere Glied. Soll im Gegentheil eins der mittlern Glieder bestimmt werden; so multiplicire man die beyden äußern Glieder, und dividire durch das bekannte mittlere Glied.

170.

Diese Eigenschaft der Gleichheit der Producte äußerer und mittlerer Glieder kann auch nur statt haben, wenn vier Größen in geometrischer Proportion stehen. Denn nimmt man vier Größen an, die nicht in geometrischer Proportion stehen und multiplicirt die hintern Glieder mit dem Exponenten des ersten Verhältnisses, so kann bloß das erste hintere Glied seinem Vordergliede gleich werden. Z. B. werden die hintern Glieder von diesen vier Größen 3, 12, 5, 10 mit dem Exponenten des ersten Verhältnisses, nemlich mit $\frac{1}{4}$ multiplicirt; so erhält man 3, 3, 5, $\frac{10}{4}$; woraus erhellet, daß die Producte der äußern und mittlern Glieder nicht gleich seyn können, und mithin auch ohne Multiplication der hintern Glieder mit dem Exponenten $\frac{1}{4}$ nicht gleich gewesen seyn würden; welcher Schluß sich auf jeden Fall anwenden läßt.

Wenn also vier Größen so beschaffen sind, daß das Product der äußern gleich dem Producte der mittlern Glieder ist, so stehen

dieſe Größen in Proportion. Hieraus folgern wir dieſe zweyte Eigenſchaft der Proportion.

171.

Stehen Größen in Proportion, ſo werden ſie es auch bleiben, wenn die äußern Glieder in die Stelle der mittlern, und die mittlern in die Stellen der äußern geſetzt werden.

172.

Auch werden dieſe vier Größen in Proportion ſtehen, wenn die Stellen der mittlern oder der äußern Glieder verwechſelt werden.

Denn man ſiehet leicht, daß in allen dieſen Fällen die Gleichheit der Producte ſtatt finden müſſe.

Alſo können in der Proportion $3 : 8 = 12 : 32$ durch die bloße Verſetzung der Glieder die folgenden Proportionsätze hervorgebracht werden:

$$3 : 8 = 12 : 32$$
$$3 : 12 = 8 : 32$$
$$32 : 12 = 8 : 3$$
$$32 : 8 = 12 : 3$$
$$8 : 3 = 32 : 12$$
$$8 : 32 = 3 : 12$$
$$12 : 3 = 32 : 8$$
$$12 : 32 = 3 : 8$$

Eben ſo verhält es ſich mit einer jeden andern Proportion

173.

Da nun vier Größen in Proportion bleiben, wenn auch das dritte Glied in die Stelle des zweyten, und

so umgekehrt, gesetzt wird, so kann man hieraus schliessen, daß vier Größen auch in Proportion bleiben, wenn die vordern Glieder durch einerley Zahl multiplicirt oder dividirt werden; und eben so verhält es sich mit den hintern Gliedern. Denn bey der vorerwähnten Verwechslung werden die vordern Glieder der gegebenen Proportion das erste Verhältniß und die hintern Glieder das zweyte ausmachen. Also werden beyde Glieder eines Verhältnisses in diesem Fall durch einerley Zahl multiplicirt oder dividirt, welches aber (nach §. 160) ohne Nachtheil desselben geschehen kann.

Z. B. wenn man die Proportion $3 : 7 = 12 : 28$ hat, so ist, indem man die zwey vordern Glieder mit 3 dividirt, $1 : 7 = 4 : 28$, weil man aus der Proportion $3 : 7 = 12 : 28$, (nach §. 172) diese folgern kann $3 : 12 = 7 : 28$; und indem man hier die zwey Glieder des ersten Verhältnisses durch 3 dividirt, so hat man $1 : 4 = 7 : 28$, die (nach §. 172) in $1 : 7 = 4 : 28$ verändert werden kann.

174.

Wird in einer Proportion die Summe oder die Differenz des vordern und hintern Gliedes eines jeden Verhältnisses mit dem vordern oder hintern Gliede desselben auf einerley Art verglichen; so entsteht hierdurch jederzeit eine neue Proportion.

So z. B. ergeben sich aus der Proportion

$$12 : 3 = 32 : 8$$

die folgenden Proportionen:

$$12 + 3 : 3 = 32 + 8 : 8$$
$$12 - 3 : 3 = 32 - 8 : 8$$
$$12 + 3 : 12 = 32 + 8 : 32$$
$$12 - 3 : 12 = 32 - 8 : 32.$$

Denn geschiehet die Vergleichung mit dem Hintergliede, so siehet man leicht, daß das Hinterglied einmal mehr oder weniger als zuvor in dem Vordergliede enthalten seyn müsse. Da nun in einer jeden Proportion das zweyte Verhältniß eben so angestellt wird, als im ersten, so müssen beyde neue Verhältnisse einander gleich seyn.

Vergleicht man aber mit dem Vordergliede, so darf man sich bey der zu verändernden Proportion bloß vorstellen, daß das Vorderglied eines jeden Verhältnisses in die Stelle des Hintergliedes (nach §. 171) gesetzt sey, dann muß der vorhergehende Beweis auch hier angewendet werden können.

175.

Da aus einer Proportion, deren mittlere Glieder mit einander verwechselt werden, (nach §. 172.) wiederum eine neue Proportion entstehet, so können wir schließen, daß ein Vorderglied das andere so oft, als ein Hinterglied das andere, in sich enthalte, Folglich enthält in jeder Proportion die Summe der Vorderglieder die Summe der Hinterglieder so oft oder ist in ihr so oft enthalten, als ein Vorderglied sein Hinterglied enthält, oder darinnen enthalten ist.

So ist z. B. aus der Proportion $12 : 3 = 32 : 8$ offenbar, daß sich die Summe 12 und 32 zu der Summe von 3 und 8 wie 12 zu 3 verhält.

Um sich aber ganz allgemein hievon zu überzeugen, darf man nur bemerken, daß jederzeit, wenn z. B. das erste Vorderglied, das zweyte Vorderglied 4 mal enthält, beyder Summen dieses zweyten Vorderglied 5mal enthalten müsse. Da nun nach gleichen Gründen die Summe der Hinterglieder das zweyte Hinterglied auch 5 mal enthalten muß, so folgt: daß die Summe der Vorderglieder die Summe der Hinterglieder, wie ein fünffaches Vorderglied das fünffache Hinterglied, d. h. (nach § 160.) wie ein Vorderglied sein Hinterglied enthält.

Eben so kann man beweisen, daß die Differenz der vordern Glieder sich zu der Differenz der hintern Glieder verhalte, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede.

176.

Aus diesem so eben erwiesenen Satz erhellet, daß, wenn bey zwey gleichen Verhältnissen die vordern und auch die hintern Glieder addirt werden, das Verhältniß dieser Summe jedem der ersten Verhältnisse gleich sein müsse.

Wie z. B. 4 : 12
und 7 : 21

11 : 33

Man hat also noch dasselbe Verhältniß, wenn man die Vorderglieder und die Hinderglieder zusammen addirt.

Demnach muß sich auch bey mehreren gleichen Verhältnissen die Summe aller Vorderglieder zu der Summe aller Hinterglieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede verhalten.

So z. B. kann man von den folgenden gleichen Verhältnissen 4 : 12. = 7 : 21 = 2 : 6 behaupten, daß die Summe von 4, 7, und 2, sich zu der Summe von 12, 21 und 6, wie 4 : 12 oder wie 7 : 21 u. s. w. verhalte.

Denn, da wir so eben gesehen haben, daß, wenn sowohl die vordern als auch die hintern Glieder zweyer gleichen Verhältnisse addirt werden, sich ihre Summen eben so wie die Glieder der ersten Verhältnisse verhalten; so muß das Verhältniß dieser Summen auch dem dritten Verhältnisse gleich seyn. Folglich muß, wenn das neue Verhältniß zu dem dritten Verhältniß auf gleiche Art addirt wird, wiederum ein gleiches Verhältniß entstehen.

177.

Ein zusammengesetztes Verhältniß wird dasjenige genannt, welches entstehet, wenn sowohl die vordern als auch die hintern Glieder zweyer oder mehrerer Verhältnisse mit einander multipliciret werden.

Hätte man z. B. die beiden Verhältnisse 12 : 4 und 25 : 5, so würde das Product der vordern Glieder 300 und das Produkt der hintern 20 seyn. Folglich würde das Verhältniß 300 : 20 das von den Verhältnissen 12 : 4 und 25 : 5 zusammengesetzte Verhältniß heißen.

178.

Der Exponent eines solchen Verhältnisses ist eben derselbe, als wenn die Exponenten der zusammenzusetzenden Verhältnisse ein jeder für sich bestimmt, und sodann mit einander multipliciret worden wären. Denn der Exponent von 12 : 4 ist 3

und der von 25: 5 ist 5. Nun ist 3 mal 5 gleich 15, welche Zahl aber den Exponenten von 300: 20 bestimmt. Daß dieses allgemein sey, davon überzeugt man sich, wenn man bemerkt, daß (nach § 157.) jeder Exponent durch einen Bruch bestimmt wird, dessen Zähler das vordere Glied, und dessen Nenner das hintere Glied ist. Mithin muß der Exponent des zusammengesetzten Verhältnisses ein Bruch sein, dessen Zähler das Product der vordern Glieder und dessen Nenner ein Product der hintern Glieder ist. Folglich ist er ein Product der beyden Brüche, welche die Exponenten der zusammenzusetzenden Verhältnisse bestimmen.

179.

Wenn die zusammenzusetzenden Verhältnisse einander gleich sind, und ein jedes für sich, als ein einfaches betrachtet wird, so heißt ein aus zwey gleichen Verhältnissen zusammengesetztes Verhältniß ein zweymal höheres, als eines der ersten Verhältnisse; ein aus drey gleichen Verhältnissen zusammengesetztes, ein dreymal höheres; ein aus vier gleichen Verhältnissen ein viermal höheres, u. s. f.

180.

Wenn die Glieder zweyer Proportionen der Ordnung nach mit einander multipliciret werden, d. h, wenn das erste Glied der ersten Proportion mit dem ersten Gliede der andern, das zweyte Glied der ersten Proportion mit dem zweyten Gliede der andern

dern u. s. w. multiplicirt wird; so formiren die hierdurch entstehenden vier Producte wiederum eine neue Proportion,

Denn, da jede der zwey Proportionen aus zwey gleichen Verhältnissen besteht, so werden die Exponenten zweyer gleichen Verhältnisse mit dem Exponenten zweyer andern gleichen Verhältnisse multiplicirt; mithin müssen die zusammengesetzten Verhältnisse einander gleich seyn, und folglich die vier Producte in Proportion stehen.

181.

Hieraus folgt, daß wenn vier Größen in Proportion stehen, auch ihre Quadrate und Cuben und alle andere Potenzen in Proportion stehen müssen, weil, um diese Potenzen zu formiren, die Glieder einer Proportion so oft, als der Exponent der Potenz es anzeigt, mit sich selbst multiplicirt werden müssen.

182.

Ferner folgt, daß, wenn vier Größen in Proportion stehen, auch ihr Quadrat, Cubic und alle andere Wurzeln in Proportion stehen müssen.

Denn, wenn aus einem jeden der beyden ersten Glieder einer Proportion, die Quadratwurzel gezogen wird, so ist (nach § 135 und 157.) der Exponent von diesen Quadratwurzeln nichts anders, als die Quadratwurzel des Exponenten der beyden ersten Glieder.

Eben dieses läßt sich aber auch behaupten, wenn aus den beyden letzten Gliedern derselben Proportion die Quadratwurzel gezogen wird. Demnach müssen, da die Exponenten der Verhältnisse von dieser Proportion als gleich angenommen sind, es auch die Quadratwurzeln ihrer Exponenten seyn, und folglich muß das Verhältniß von den Quadratwurzeln der beyden ersten Glieder dem Verhältniß von den beyden letzten Gliedern gleich seyn; welches eben so für die Cubic und andere Potenzenwurzeln erwiesen werden kann.

Anwendung der vorhergehenden Sätze.

183.

Die bisher bewiesenen Sätze, welche Eigenschaften der Proportionen heißen, werden in allen Theilen der mathematischen Wissenschaften angewendet; gegenwärtig wollen wir uns aber mit ihnen bloß in so fern beschäftigen, als sie die Arithmetik angehen, und wollen mit der (§. 169) bestimmten Regel, auf welcher alle hier folgende Regeln beruhen, den Anfang machen.

Von der geraden einfachen Regel de tri.

184.

Die Regel de tri ist in verschiedene Arten eingetheilt; eine jede derselben aber hat zum Zweck

zu dreyen bekannten Gliedern einer Proportion das vierte unbekannte zu finden.

Die hier abzuhandelnde Regel de tri, heißt die einfache, weil jede durch sie aufzulösende Frage nicht mehr als vier Größen enthält, von welcher drey bekannt sind, und die vierte bestimmt werden muß. Die gerade heißt sie, weil von den bey ihr vorkommenden vier Größen jederzeit zwey sind, auf die sich die andern nicht allein geradezu beziehen, sondern auch dergestalt von ihnen abhängen, daß, so oft die erste Größe derselben die andere enthält, oder in ihr enthalten ist, eben so oft auch die auf die erste sich beziehende Größe, die auf die zweyte sich beziehende enthalten, oder in ihr enthalten seyn muß.

Kürzer kann dieses gefaßt werden, wenn man sagt: jede Größe und die auf sie sich beziehende können beyde entweder vordere oder hintere Glieder einer Proportion seyn. Und in diesem Fall sagt man: die beyden Hauptgrößen stehen mit denen auf sie sich beziehenden Größen in geradem Verhältniß.

Erstes Beyspiel.

Vierzig Arbeiter haben in einer gewissen Zeit einen Graben von 268 Ruthen lang gegraben. Man fragt, wie viel Ruthen 60 Arbeiter in eben der Zeit graben werden?

Man siehet leicht, daß in eben dem Verhältniß, in welchem die Anzahl der Arbeiter vermehret wird, auch die Anzahl der Ruthen zu nehmen muß, dergestalt, daß, wenn die Anzahl der Arbeiter doppelt, drey und vierfach, und so weiter vermehrt wird auch eine doppelte, drey und vierfache An-

zahl Ruthen verfertigt werden müssen. Hieraus folgt, daß die gesuchten Ruthen die 268 Ruthen eben so oft enthalten müssen, als die auf jene Ruthen sich beziehende Zahl 60 die auf 268 Ruthen sich beziehende Zahl 40 enthält; demnach muß das vierte Proportionalglied zu den drey folgenden Gliedern bestimmt werden.

40 : 60 = 286 Ruthen :

oder wenn die beyden ersten Glieder (nach §. 160) durch 20 dividirt werden, zu den drey folgenden

2 : 3 = 268 Ruthen. :

Hier kann ferner das erste und dritte Glied noch mit 2 dividirt werden, dieses giebt 1 : 3 = 134 Ruthen. Multiplicirt man nun (nach §. 169) 134 mit 3, dividirt das Product 402 durch 1, so erhält man 402 Ruthen zum Quotienten.

Mithin müssen 60 Arbeiter 402 Ruthen graben können.

Zweytes Beyspiel.

Ein Artillerietrain hat in 6 Tagen 45 Meilen zurückgelegt. Man will wissen, wie viel Zeit er brauchen würde, um 243 Meilen mit derselben Geschwindigkeit zu beenden?

Da die Anzahl der Meilen zunimmt, so ist offenbar, daß auch verhältnißmäßig die Anzahl der Tage zunehmen muß; mithin müssen 6 Tage in der zu bestimmenden Anzahl Tage eben so oft enthalten seyn, als 45 Meilen in 243 Meilen. Demnach soll das vierte Proportionalglied zu den drey folgenden bestimmt werden.

45 : 243 = 6 :

Hier kann man das erste und dritte Glied mit 3 heben, und erhält

15 : 243 = 2 :

Wird nun 243 mit 2 multiplicirt, und das Product durch 15 dividirt, so erhält man $32\frac{2}{5}$ Tage.

Drittes Beyspiel.

Wenn ein von Bäumen, Wurzeln und Steinen entblößter Platz, der mit Eicheln besäet wor-

den ist, 57 Morgen, 34 Quadratruten Flächeninhalt in sich begreift, und 14 Wispel, 13 Scheffel 11 Metzen Saamen erfordert hat, wie viel wird ein Platz von derselben Beschaffenheit, der aber 97 Morgen, 75 Quadratruten Flächeninhalt hat, Saamen erfordern?

Hier ist das vierte Proportionalglied zu den drey folgenden:

57 Morgen 34 Quadratr.: 97 M. 75 Quadratr. = 14 W. 13 S. 11 Mtz. zu bestimmen, d. h., 97 Morgen, 75 Quadratruten müssen mit 14 Wispel, 13 Scheffel, 11 Metzen (nach §. 116) multiplicirt und das Product durch 57 Morgen, 34 Quadratruthen (nach §. 122) dividirt werden.

Noch kürzer kann aber die Rechnung gemacht werden, wenn man die beyden Glieder des ersten Verhältnisses in ihre kleinste Art, d. h., in Quadratruthen verwandelt, und dann zu folgenden drey Gliedern:

10294 Quadr.: 17535 Quadr. = 14 W. 13 S. 11 M.

das vierte bestimmt. Multiplicirt man nun 14 Wispel, 13 Scheffel, 11 Metzen (nach §. 116) mit 17535, und dividirt das Product 255490 Wispel, 10 Scheffel, 5 Metzen durch 10294, so zeigt der Quotient 24 Wispel, 19 Scheffel, $10\frac{6505}{10294}$ Metzen, die verlangte Menge Saamen an.

Hätte man beyde Glieder von einer Art in ihre niedrigsten Einheiten, wie im vorhergehenden Beyspiel bestimmt, und es wären nun noch Brüche in beyden Gliedern befindlich; so verwandle man diese Glieder auch in die ihnen zugehörigen Brüche und mache hierauf (nach §. 161) ihr Verhältniß einfacher.

Von der umgekehrten einfachen Regel de tri.

185.

Die umgekehrte einfache Regel de tri unterscheidet sich von der eben abgehandelten geraden darin, daß von den vier Größen, um wel-

cher willen die Rechnung angestellt wird, die eine derselben die zweyte von gleicher Art so oft enthält, als im Gegentheil die auf die erste sich beziehende, in der auf die zweyte sich beziehenden enthalten ist. Daß also, wenn die Größen nach Untersuchung der Aufgabe gehörig in Proportion gestellt werden, die eine der Hauptgrößen und die auf sie sich beziehende, die äußern Glieder, und die zwey der Hauptgrößen und die auf sie sich beziehende, die mittlern Glieder dieser Proportion ausmachen.

In diesem Fall sagt man: die beyden Hauptgrößen stehen mit denen, auf sie sich beziehenden Größen in umgekehrtem Verhältniß.

Uebrigens entsteht hierdurch bey der Operation kein Unterschied; denn man bestimmt auch hier das vierte Glied einer Proportion auf eben die Art, wenn nur die Operation selbst zuvor durch ein vernünftiges Schließen eingeleitet worden ist.

Einige Rechenmeister haben für den gegenwärtigen Fall eine der Aussage der Frage unterworfene Regel vorgeschrieben. Wir folgen ihrem Beyspiele nicht; nicht die Aussage (die öfters fehlerhaft ist), sondern die Natur der Frage muß zur Auflösung leiten.

Erstes Beyspiel.

Gesetzt man fragt: Wenn 20 Arbeiter mit einer gewissen Arbeit in 25 Tagen fertig geworden sind, wie viel würden zu derselben Arbeit erfordert worden seyn, wenn sie in 10 Tagen hätte zu Stande kommen sollen?

Es erhellet, daß, da zu der Arbeit eine kürzere Zeit gegeben ist, auch verhältnißmäßig mehr Menschen angestellt werden müssen, mithin, daß die zu bestimmende Zahl die 30 so oft enthalten müsse, als die auf diese 30 Menschen sich beziehende Zahl 25 die auf die zu bestimmende Arbeiter sich beziehende Zahl 10 enthält, und das also zu den folgenden Gliedern:

10 Tage : 25 Tage = 30 Menschen:

das vierte Glied bestimmt werden muß, welches geschiehet, wenn 25 mit 30 multiplicirt und das Product 750 durch 10 dividirt wird. Man erhält dann 75 Menschen.

In diesem Beyspiele kann man aber das erste und dritte Glied mit 10 dividiren, und erhält kürzer das Resultat 3 . 25 = 75 Menschen.

Zweytes Beyspiel.

Man soll 69 Pariser Fuß nach Brandenburger Fuß *) bestimmen.

Um diese Aufgabe und eine jede von derselben Art aufzulösen, hat man ein gewisses Maaß, nemlich den Pariser Fuß zum Grund gelegt, ihn in 144 Theile getheilt, und nach dieser Theilung das Maaß von einem jeden andern Fuß bestimmt. Weiß man demnach, daß von solchen Theilen, der Brandenburger Fuß 139,13 Theile hat, so sieht man, daß, da der Brandenburger Fuß weniger Theile enthält, als der Pariser, mithin kleiner ist, auch offenbar in einer bestimmten Länge verhältnißmäßig mehr Brandenburger als Pariser Fuße enthalten seyn müssen, und mithin der Frage ein Genüge geleistet wird, wenn zu den drey folgenden Gliedern 139,13 : 144 = 69 das vierte Glied bestimmt wird, welches geschiehet,

*) Diese Benennung schlägt der geheime Ober-Baurath Eytelwein für den rheinländischen Fuß vor, davon man die Gründe in seiner nützlichen Schrift: Vergleichungen der in den Königlich Preußischen Staaten eingeführten Maaße und Gewichte. Berl. 1798 findet.

wenn 69 mit 144 multiplicirt und das Product durch 139,13 dividirt wird, wodurch $\frac{144.69}{139,13}$ Brandenburger Fuß, die der Länge von 69 Pariser Fuß gleich sind, entstehen.

Drittes Beyspiel.

Wie viel Rubel erhält man für 200 Ducaten?

Um dieses und andere ähnliche Beyspiele von den folgenden Münzsorten aufzulösen, muß man wissen, daß

1 Fr.D'or gilt $5\frac{1}{3}$ Thlr., 1 Rubel gilt $1\frac{7}{10}$ Rthlr.

1 Ducaten = 3 — 1 Guinee = $6\frac{1}{5}$ —

Dies vorausgesetzt, kann man wiederum, wie im vorhergehenden Beyspiel, schließen: da 1 Ducaten mehrere Thaler als 1 Rubel enthält; so müssen auch in einer bestimmten Anzahl Ducaten mehrere Rubel als Ducaten enthalten seyn. Wir suchen also zu den drey folgenden Gliedern

$1\frac{7}{10} : 3 = 200$ zu

oder $\frac{27}{20} : \frac{60}{20} = 200$ zu

oder $27 : 60 = 200$ zu

oder $9 : 20 = 200$

das vierte, welches geschiehet, wenn 20 mit 200 multiplicirt und dies Product durch 9 dividirt wird, wodurch $444\frac{4}{9}$ entstehet. Demnach betragen 200 Ducaten $444\frac{4}{9}$ Rubel.

Eben so verfährt man, wenn eine gewisse Anzahl Scheffel eines Orts in Scheffel eines andern Orts verwandelt werden sollen, doch muß wiederum zuvor der Inhalt eines jeden dieser Scheffeln bekannt seyn.

Viertes Beyspiel.

Eine Fourageliefernng von 60 Berliner Scheffeln Hafer soll in Breslau in Empfang genommen werden. Man fragt, wie viel sie nach Breslauer Scheffeln betragen?

Da der Berliner Scheffel 2758,952 Theile, und der Breslauer 3730 solcher Theile enthält, so muß man auch, da hieraus erhellet, daß der Berliner Scheffel kleiner als der Breslauer ist, verhältnißmäßig eine kleinere Anzahl Bres-

lauer als Berliner erhalten. Demnach muß zu den drey folgenden Gliedern:

$$3730 : 2758{,}952 = 60$$

das vierte bestimmt werden, welches nach dem obigen $\frac{2758{,}952 \cdot 60}{3730}$ Scheffel beträgt.

Von der zusammengesetzten Regel de tri.

186.

In den beyden vorhergehenden Arten der Regel de tri wird in jeder Aufgabe das Verhältniß der zu bestimmenden Größe zu der Größe, die mit ihr von einerley Art, durch ein einfaches Verhältniß der beyden andern Größen von dieser Aufgabe bestimmt. In der zusammengesetzten Regel de tri aber erhält das Verhältniß der zu bestimmenden Größe und der Größe, die mit ihr von einerley Art ist, nicht bloß durch ein einfaches Verhältniß zweyer andern Größen seine Bestimmung, sondern durch mehrere einfache Verhältnisse, die nach den Umständen der Aufgabe (nach §. 177) zusammengesetzt werden müssen. Sind aber diese Verhältnisse zusammengesetzt, dann wird die Aufgabe, wie bey der einfachen Regel de tri aufgelößt. Folgende Beyspiele werden dieses deutlicher machen.

Erstes Beyspiel.

Wenn 15 Menschen einen Graben von 166 Ruthen Länge in 9 Tagen auswerfen, wie lang wird der Graben ausgeworfen seyn, wenn 18 Menschen 11 Tage arbeiten?

Man siehet, daß die hier zu bestimmende Länge theils von der Anzahl der Arbeiter, theils von der Anzahl der Tage abhängt.

Um nun die eine Anzahl so wohl, als die andere, in Erwägung zu ziehen, bemerke man, daß 15 Menschen in 9 Tagen nicht mehr bereiten, als 9 mal 15 Menschen, nemlich 135 Menschen, in einem Tage. Eben so, daß 18 Menschen in 11 Tagen nicht mehr bereiten, als 11 mal 18 Menschen, d. h., 198 Menschen in einem Tage.

Demnach ist die Aufgabe jetzt folgendergestalt vorzutragen: 135 Menschen haben 166 Ruthen Länge ausgegraben, wie viel Länge werden 198 Menschen in eben der Zeit zu Stande bringen? Folglich muß zu den folgenden drey Gliedern:

135 M. : 198 M. = 166 R.

das vierte Glied der Proportion bestimmt werden. Multiplicirt man also 198 mit 166 und dividirt das Product durch 135, so erhält man $243\frac{3}{135}$ Ruthen für die bestimmte Länge.

Zweytes Beyspiel.

Wir wollen annehmen, man wisse, daß 20 Arbeiter in 8 Tagen 154 Klafter Holz schlagen können; es sey aber die Frage, wie viel Zeit wird erfordert, wenn 80 Arbeiter 275 Klafter schlagen sollen?

Man bemerke hier, daß das Verhältniß der Tage aus dem Verhältniß der Klaftern und Arbeiter zusammengesetzt werden soll. Je mehr wir nun Arbeiter anstellen, desto weniger Zeit gebrauchen wir; mithin muß das Verhältniß der Arbeiter umgekehrt werden. Das Verhältniß der Klaftern aber bleibt stehen, weil, je mehr wir Klaftern schlagen lassen, je mehr Zeit erfordert wird. Demnach setzen wir das Verhältniß der Arbeiter 80 : 20, und das Verhältniß der Klaftern

154 : 275 unter einander. Und nun können wir, wenn diese beyden Verhältnisse, so wie sie hier stehen, zusammengesetzt werden, daß Verhältniß der Tage bestimmen. Da aber die beyden Glieder des Verhältnisses der Arbeiter, durch 20 dividirt, 4 : 1 und die beyden Glieder des Verhältnisses der Klaf-

tern, durch 11 dividirt, 14 : 25 ergeben, so setzt man die beyden letztern Verhältnisse zusammen; dann erhält man für unsere Proportion, die folgenden drey ersten Glieder 56 : 25 = 8: und wenn die vordern Glieder 56 und 8 durch 8 dividirt werden, 7 : 25 = 1:; wodurch das vierte Glied, nemlich 3 und $\frac{4}{7}$ Tag, zur Beantwortung unserer Frage sehr leicht bestimmt wird.

Von der Gesellschaftsregel.

187.

Man nennt diese Rechnungsart also, weil sie den erlangten Gewinn oder erlittenen Verlust einer Gesellschaft unter ihre Glieder theilet, und ihr Zweck ist, eine bestimmte Zahl in Theile, deren Verhältniß zu einander gegeben ist, einzutheilen.

Die hierzu erforderliche Regel gründet sich auf die (§. 176) abgehandelte Eigenschaft der Proportionen, und wir wollen in dem folgenden Beyspiel zeigen, wie diese Regel aus der vorgedachten Eigenschaft herzuleiten ist.

Erstes Beyspiel.

Es sey die Zahl 120 in drey Theile, die unter einander in dem Verhältniß der Zahlen 4, 3, 2 stehen, zu theilen.

Aus den Bedingungen der Aufgabe ergeben sich die beyden folgenden Proportionen:

4 : 3 = dem 1ste Theil : dem 2ten
4 : 2 = dem 1sie Theil : dem 3ten

und (nach §. 172) diese beyden andern:

4 : dem 1sten Theil = 3 : dem 2ten
4 : dem 1sten Theil = 2 : dem 3ten.

Demnach erhält man folgende 3 gleiche Verhältnisse: 4 verhält sich zu dem 1sten Theil, wie 3 zum zweyten und wie 2 zum dritten Theil.

Da aber (nach §. 176) bey gleichen Verhältnissen sich die Summe der vordern Glieder zu der Summe der hintern Glieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede verhält; so können wir schließen: 9 als die Summe der vordern Glieder, verhält sich zu 120 als die Summe der hintern Glieder, wie ein Vorderglied zu seinem Hintergliede, d. h., wie eins, der gegebene Theil, zu dem ihm zustimmenden Theil aus 120.

Daraus ergiebt sich also folgende Regel: Man summire 1) die gegebenen verhältnißmäßigen Theile, und formire 2) so viel Sätze der Regel de tri, als Theile zu bestimmen sind, deren jeder die Summe der gegebenen verhältnißmäßigen Theile zum ersten Gliede, die gegebene zu theilende Zahl zum 2ten Gliede, und eins der gegebenen verhältnißmäßigen Theile zum 3ten Gliede haben muß.

Demnach giebt gegenwärtiges Beyspiel folgende Proportionssätze:

9 : 120 = 4 : 1sten Theil
9 : 120 = 3 : 2ten Theil
9 : 120 = 2 : 3ten Theil.

deren vierte Glieder durch $53\frac{1}{3}$, 40, $26\frac{2}{3}$ bestimmt werden, die in dem verlangten Verhältniß gegen einander stehen und zusammen genommen, 120 ausmachen.

Uebrigens begreift man leicht, daß einer von den vorhergehenden Proportionssätzen entbehrt werden kann, wenn man, um den letzten Theil zu erhalten, die Summe der schon bestimmten Theile von der gegebenen Summe abzieht.

Zweytes Beyspiel.

Ein Förster hat, um einen Schonungsgraben anfertigen zu lassen, 10 Thlr. erhalten. Er verdingt diese Arbeit an drey Männer. Der eine wirft nun 45 Ruthen Grabenlänge aus, der andere 31, und der dritte 21 Ruthen. Es fragt sich, wie viel Lohn wird ein jeder Arbeiter erhalten?

Da hier der Lohn eines jeden Arbeiters im Verhältniß der Zahlen 45, 31 und 21 ausgezahlt werden muß; so bestimme man zu einem jeden der drey folgenden Proportionssätze das vierte Glied:

97 : 10 = 45 : 1sten Theil
97 : 10 = 31 : 2ten Theil
97 : 10 = 21 : 3ten Theil

Dann findet man den Lohn des ersten Arbeiters
zu 4 Thlr. 15 Gr. $4\frac{8}{97}$ Pf.
des zweyten Arbeiters zu 3 Thlr. 4 Gr. $8\frac{40}{97}$ Pf.
des dritten Arbeiters zu 2 Thlr. 3 Gr. $11\frac{49}{97}$ Pf.

Drittes Beyspiel.

Drey Schiffer haben 375 Rthlr. verdient und wollen sich darüber berechnen. Der erste hat 2000 Klafter Holz 50 Meilen gefahren, der zweyte 1500 Klafter 75 Meilen und der dritte 3000 Klafter 60 Meilen. Man will wissen, wie viel ein jeder von den 375 Rthlr. erhält?

Um die vorhergehende Regel auf den gegenwärtigen Fall anwenden zu können; so nehme man an, die Schiffer hätten ihre verschiedene Ladungen alle auf eine gleiche Weite gefahren.

Man schließe nemlich: für 2000 Klafter auf 50 Meilen wird eben so viel gezahlt, als für 50 mal 2000 Klafter, d. h., für 100000 Klafter auf eine Meile. Desgleichen für 1500 Klafter auf 75 Meilen eben so viel, als für 75 mal 1500 Klafter, d. h., für 112500 Klafter auf eine Meile. Endlich für 3000 Klafter auf 60 Meilen eben so viel, als für 60 mal 3000 Klafter, d. h. 180000 Klafter auf eine Meile.

Dem zufolge müssen die 375 Rthlr. in drey Theile, die sich wie die Zahlen 100000, 112500 und 180000 verhalten, getheilet werden, welches geschiehet, wenn in den drey folgenden Proportionssätzen das vierte Glied bestimmt wird:

392500 : 375 oder

3140 : 3 = 100000 : 1sten Theil = 95 Thlr. 12 Gr. $11\frac{145}{157}$ Pf.
3140 : 3 = 112500 : 2ten Theil = 107 Thlr. 11 Gr. $7\frac{135}{157}$ Pf.
3140 : 3 = 180000 : 3ten Theil = 171 Thlr. 23 Gr. $4\frac{104}{157}$ Pf.

Viertes Beyspiel.

Eine eichene Mühlwelle kostet 15 Thlr. 17 Gr. man hat aber über den vollen Werth des Holzes auf einen jeden Thaler 3 Gr. Stammgeld und 3 Gr. Pflanzgeld bezahlt. Es wird gefragt, wie viel an Holz, an Stamm- und Pflanzgeld, ein jedes besonders, von dem obigen Preise hat bezahlt werden müssen.

Hier sollen 15 Rthlr. 17 Gr. in 3 Theile, die sich, wie die Zahlen 24, 3, 2 verhalten, getheilt werden. Also schließe man:

29 : 15 Thlr. 17 Gr. = 3 : 1 Thlr. 15 Gr.
29 : 15 — 17 — = 2 : 1 — 2 —
29 : 15 — 17 — = 24 : 13 — 1 —

Fünftes Beyspiel.

Ein Förster hat für Kiehnen Brennholz 500 Thlr. eingenommen, und will wissen, wie viel von diesem Gelde das Holzgeld und wie viel das Stammgeld beträgt. Da vom Kiehnen Brennholz nicht 3 Gr. Stammgeld auf 1 Thlr. gegeben werden; so sind die 500 Thlr. im Verhältniß der Zahlen 24 und 3 zu theilen. Demnach suche man zu einem jeden der zwey folgenden Proportionssätze das vierte Glied.

27 : 500 = 24 : Holzgelde.
27 : 500 = 3 : Stammgelde.

Oder, indem die 2 vordern Glieder durch 8 dividirt werden.

9 : 500 = 8 : Holzgelde = 444 Thlr. 10 Gr. 8 Pf.
9 : 500 = 1 : Stammgeld = 55 ' 13 ' 4 '

In den vorhergehenden haben wir so viel von mathematischen und geometrischen Proportionen und deren Anwendung beygebracht, als nöthig ist, eine vollständige Uebersicht dieser Gegenstände zu bekommen, wir geben hier zur nähern Kenntniß und nöthiger Uebung noch einiges, über jene Gegenstände, und versichern, daß man es sich nicht ohne Nutzen bekannt machen wird.

Weitere Ausführung der Eigenschaften der arithmetischen Verhältnisse und Proportionen.

I. Ein arithmetisches Verhältniß wird nicht verändert, wenn man zu den Gliedern gleiche Größen zusetzt oder wegnimmt.

Es ist offenbar $16 - 23 = (16+3) - (23+3)$
$= 19 - 26;$
oder $16 - 23 = (16-5) - (23-5)$
$= 11 - 18$

Nimmt nemlich nur ein Glied um eine Größe zu, so wird der Name beyder Glieder um eben so viel Einheiten größer als ein Glied zugenommen hat, nimmt daher das andere Glied um eben solche Größe zu, so wird der Name des Verhältnisses gerade wieder um eben so viel kleiner als er vorhin größer wurde.

Mit der Abnahme verhält es sich umgekehrt; denn nimmt ein Glied ab, so wird der Name um eben so viel kleiner, und nimmt das andere Glied eben so viel ab, so wird der Name wieder um eben so viel größer als er vorhin kleiner wurde.

II. Die Glieder eines arithmetischen Verhältnisses, mit einerley Zahl multiplicirt, geben ein Verhältniß, dessen Name genau so viel mal größer, als der Name des gegebenen ist, und als die multiplicirende Zahl Einheiten enthält, und umgekehrt, wenn man mit einerley Zahl dividirt, so wird der Name um so viel mal kleiner.

Offenbar ist bey $5 - 9$ der Name 4;
diese Verhältnisse mit 7 multiplicirt
giebt $7 \cdot 5 - 7 \cdot 9 = 35 - 63$
davon der Name $28 = 7 \cdot 8$ ist.

Eben so ist bey $36 - 48$ der Name 12
hier mit 6 dividirt, giebt $\frac{36}{6} - \frac{48}{6} = 6 - 8$
davon der Name $2 = \frac{12}{6}$ ist.

Auch hiervon ist der Grund leicht einzusehen, denn die Glieder können als Theile des Namen angesehen werden, wenn man also den Namen größer oder kleiner haben will, so darf man nur die Theile so viel mal größer oder kleiner machen.

III. Die Summe aller vier Glieder einer arithmetischen Proportion, ist gleich dem doppelten Producte der beyden äußern oder der beyden mittlern Glieder,

Z. B. bey $15 - 8 = 26 - 19$

ist $15 + 8 + 26 + 19 = 68 = 2(15 + 19)$

$= 2(8 + 26)$.

Es ist nemlich (aus §. 166) bekannt, daß die Summe der äußern Glieder gleich der Summe der mittlern Glieder ist, addirt man also noch die Summe der mittlern Glieder auf beyden Seiten, so folgt offenbar das Behauptete.

Hieraus folgt ferner,

VI. daß die drey Glieder einer stetigen arithmetischen Proportion gleich sind $\frac{3}{2}$ mal der Summe der äußern Glieder, oder dem dreyfachen mittlern Gliede.

Z. B. $\div$ 8, 12, 15

hier ist $8 + 12 + 16 = 36 = \frac{3}{2}(8 + 16)$

$= \frac{3}{2} \cdot 24$

Vorhin war bewiesen, daß die Summe aller vier Glieder gleich $2 = \frac{4}{2}$ mal der Summe der mittlern Glieder beträgt, da nun in einer stetigen arithmetischen Proportion die mittlern Glieder gleich sind, so ist $\frac{4}{2} \cdot 2$ mal das mittlere Glied $= 4$ mal das mittlere Glied. Zieht man aber das mittlere Glied einmal ab, so bleibt 3 mal das mittlere Glied übrig, und da das mittlere Glied in einer solchen Proportion, gleich der halben Summe der äußern Glieder ist, so ist das 3fache mittlere Glied auch offenbar gleich $\frac{3}{2}$ mal der Summe der äußern Glieder, und hiermit das Behauptete bewiesen.

Das mittlere Glied in einer stetigen arithmetischen Proportion ist also der dritte Theil der Summe aller drey Glieder und daher ist dieser dritte Theil genau immer um so viel größer als das erste Glied, als er kleiner, denn das dritte ist.

Daher kömmt es, daß man nicht allein bey dreyen, sondern bey mehrern Größen auf ähnliche Art verfährt, um eine solche zu erhalten, die gleichsam den mittlern Werth, oder das Mittel zwischen den gegebenen hält, welche im gemeinen

Leben

Leben oft verlangt wird, wie bereits §. 69 ein Beyspiel gegeben ist, zu dem wir noch folgende geben.

Wie weit wirft ein Mortier, der nach bestmöglichsten Versuchen folgende Wurfweiten gab; nemlich zur ersten 1312 Schritt, zur zweyten 1126, zur dritten 1450, und zur vierten 1112?

Die Antwort ist $\frac{1312 + 1126 + 1450 + 1112}{4} = \frac{5000}{4}$

= 1250 Schritt, welches die mittlere Wurfweite ist, weil man auf die gethane Frage, keine der gegebenen Wurfweiten zur Antwort geben könnte, ohne der Wahrheit zu nahe zu treten: denn so würde dieselbe durch 1450 Schritt viel zu groß und durch 1112 viel zu klein angegeben werden, um sich nach ihr bey diesem Geschütz richten zu können.

Uebrigens ist es einleuchtend, daß man diese Frage um so viel richtiger beantworten kann; je mehrere Würfe man gethan, und aus denselben die mittlere Wurfweite bestimmt hat.

Ferner: wären bey einer Affaire vom Regiment A 320 Mann, von B 370, von C 280, von D 158, von E 417, von F 613 geblieben, und man wollte wissen, wie viel Verlust die Regimenter im Durchschnitt gehabt;
so setzen wir:

weil A. 320 Mann
B. 370 "
C. 280 "
D. 158 "
E. 417 "
F. 613 " Verlust hat, so tragen sämmtliche

2158 Mann, mithin im Durchschnitt jedes Regiment 2158 = 359 bis 360 Mann.

Sollten alle Regimenter gleich stark bleiben, so müßte das Regiment

F, 613 — 360 = 253 Mann
E, 417 — 360 = 57 "
und B, 370 — 360 = 10 "

von den übrigen Regimentern ersetzt bekommen.

Oder hätte man zu verschiedenen Zeiten Pulver kaufen müssen, und gefunden, daß man zum erstenmal 4 Centner mit 114 Thlr. zum zweytenmal 6 Centner mit 192 Thlr. und zum drittenmal 2 Centner mit 52 Thlr. bezahlen mußte; man wollte dann wissen, wie hoch jeder Centner in Rechnung zu bringen wäre?

so setzen wir:

4 Centner kosten 114 Thlr.
6 = = 192 =
2 = = 52 =

12 Centner kosten 358 Thlr.

mithin ein jeder Centner $\frac{358}{12} = 29\frac{10}{12}$ Thlr. = 29 Thlr. 20 Gr.

Hätten wir hier nach dem Einkauf der 4 Centner die Bestimmung machen wollen, so würde jeder Centner nicht mehr als $\frac{114}{4}$ Thlr. = 28 Thlr. 12 Gr. gekostet haben, welcher Preis offenbar zu geringe seyn, und die Rechnung nach geschehener Durchsicht für unrichtig erkannt werden würde; und ähnliche Bewandniß würde es auch bey den andern auf gleiche Art gemachten Bestimmungen haben, weshalb keine andere, als die, so den mittlern Preis 29 Thlr. 20 Gr. angiebt, statt finden darf.

Noch einige Sätze von geometrischen Verhältnissen und Proportionen.

I. Brüche von gleichen Nenner verhalten sich wie ihre Zähler.

Z. B. $\frac{3}{8} : \frac{5}{8} = 3 : 5$.

Denn wenn beyde Glieder eines solchen Verhältnisses mit den gleichen Nenner multiplicirt werden, so entstehen die Zähler.

II. Brüche von gleichen Zähler verhalten sich umgekehrt, wie ihre Nenner.

Z. B. $\frac{3}{7} : \frac{3}{11} = 11 : 7$

Denn wenn man mit den gleichen Zähler dividirt, so erhält man Brüche von ungleichen Nenner, deren Zähler Eins ist, multiplicirt man nun das erste Glied mit dem Nenner des zweyten,

und das zweyte Glied mit den Nenner des ersten Gliedes, so folgt die Richtigkeit der Behauptung.

III. Ein Product zweyer Factoren, kann als das vierte Glied einer geometrischen Proportion angesehen werden, zu welcher sich der Multiplicand, wie die Einheit zum Multiplicator verhält.

Z. B. $3 . 8 = 1 . 24$ hier ist nach (§. 170).

$1 : 3 = 8 : 24$, welche rückwärts gelesen der behauptete Satz ist.

IV. Ein Quotient kann immer als das vierte Glied einer geometrischen Proportion angesehen werden, zu dem sich der Dividend, wie der Divisor zur Einheit verhält.

Z. B. $\frac{48}{8} = \frac{6}{1}$

daraus folgt

$1 . 48 = 6 . 8$

und hieraus

$1 : 8 = 6 : 48$,

welche rückwärts gelesen, das Behauptete ist.

Beyspiele zur einfachen geraden Regel de tri.

Wenn 1 Elle Leinwand zu 8 Gr. 4 Pf. bezahlt wird, wie viel muß ein Stück derselben oder 60 Ellen kosten?

Da hier offenbar 60 Ellen mehr kosten müssen als 1 Elle, so setzen wir:

$$\frac{1 \text{ Elle} : 60 \text{ Ellen} = 8 \text{ Gr. } 4 \text{ Pf.}}{20 \text{ Thlr. } 20 \text{ Gr.}}$$

und sprechen: 60 mal 4 Pf. geben so viel als 60 mal $\frac{1}{3}$ Gr. oder den 3ten Theil von 60 Gr., d. h., 20 Gr.; ferner 60 mal 8 Gr. gleich 60 $\frac{1}{3}$ Thlr. oder $\frac{1}{3}$ von 60 Thlr., d. h. 20 Thlr., mithin kostet das Stück 20 Thlr., 20 Gr.

Was kostet der Centner Pulver, davon das Pfund für 6 Gr. 6 Pf. geliefert wird?

Da 1 Ctr. 110 Pfund, 6 Gr = $\frac{1}{4}$ Thlr. und 6 Pf. = $\frac{1}{2}$ Gr. so setzt man:

2 Pfund : 110 Pfund = $\frac{1}{4}$ Thlr. + $\frac{1}{2}$ Gr. :

		110
2 Thlr.	7 Gr.	
27 ′	12 ′	
29 Thlr.	19 Gr.	

und spricht: $\frac{1}{2}$ Gr. mal 110 = $\frac{1}{2}$. 110 Gr. = 55 Gr. = 2 Thlr. 7 Gr.; und $\frac{1}{4}$ Thlr. mal 110 = $\frac{1}{4}$. 110 Thlr. = $27\frac{1}{2}$ Thlr. = 27 Thlr. 12 Gr., zu welchen vorige 2 Thlr. 7 Gr. genommen, 29 Thlr. 19 Gr. bestimmen.

Wie viel Papier hat man zu 100,000 Patronen nöthig, wenn 1 Bogen zu 12 Patronen erforderlich ist.

12 Patronen : 100000 Patronen = 1 Bogen

4) 12 / 3 / 25000

3) $8333\frac{1}{3}$ und in runder Zahl braucht man 9334 Bogen zu 100000 Patronen.

Weil aber auch 24 Bogen = 1 Buch, 20 Buch = 1 Rieß, und 10 Rieß = 1 Ballen; so theilen wir erst mit 24 dann mit 20 und endlich mit 10, mithin

24 = 3) 8334 Bogen
8) 2778... 6 Bogen
20) 347 Buch . 7 Buch
10) 17 Rieß 7 Rieß
1 Ballen, folglich sind 8334 Bogen so viel als 1 Ballen, 7 Rieß, 7 Buch, 6 Bogen.

Wollten wir auch die Kosten des Papiers wissen, wenn man jedes Buch zu 1 Gr. 3 Pf. bezahlt; so werden wir auf ähnliche Art finden, daß man 18 Thlr. 2 Gr. dafür erlegen müßte.

Und füllet man jede Patrone mit 2 Loth Pulver, so müßte zu 100000 Patronen 56 Centner, 90 Pfund zugethan werden.

Wenn 12 Arbeiter in 6 Stunden 2000 Patronen verfertigen können, wie viel Arbeiter sind erforderlich, die in eben der Zeit 100000 Patronen verfertigen?

Weil hier eine größere Arbeit gegeben wird, so müssen auch mehrere Mannschaften genommen werden; mithin setzen wir:

2000) 2000 Ptr. : 100000 Ptr. = 12 Arb.

1 : 50 = 12 : 50. 12 = 600 Arb;

also verfertigen 600 Arbeiter in 6 Stunden 100000 Patronen.

Beyspiele zur einfachen verkehrten Regel de tri.

Wenn 50 Arbeiter in 6 Stunden 8000 Patronen verfertigen können, wie viel Zeit werden dazu 30 Arbeiter nöthig haben?

Wir nehmen hier wahr, daß von einer und eben derselben Arbeit gesprochen wird, weshalb wir sie nicht in Betrachtung nehmen, sondern vielmehr darauf denken, wie das Verhältniß der Arbeiter anzusehen ist. Da nun offenbar ist, daß weniger Arbeiter weniger arbeiten, so müssen wir ihnen mehrere Zeit geben, weil sie eben so viel arbeiten sollen; demnach muß das Verhältniß der Arbeiter nicht geradezu, sondern umgekehrt genommen und gesetzt werden:

30 Arb. : 50 Arb. = 6 St. :

oder 3 ′ : 5 ′ = 6 ′ :

oder 1 ′ : 5 ′ = 2 : 2 . 5 = 10 St.

also endigen 30 Arbeiter in 10 Stnnden eben so viel Arbeit, als 50 Arbeiter in 6 Stunden.

Es sey bekannt, daß 100 Arbeiter in 8 Tagen eine bestimmte Arbeit zu Ende bringen können, gewisse Umstände erforderten aber, daß sie in 2 Tagen beendigt seyn solle, wie viel Arbeiter wird man anstellen müssen?

Da in weniger Zeit von einer gleichen Menge Arbeiter, weniger gethan werden kann, so mnß man in dieser Zeit zu eben derselben Arbeit, mehrere Arbeiter anstellen, und also das Verhältniß der Zeiten umgekehrt setzen; als

2 Tage : 8 Tage = 100 Arb. :

oder 1 ′ : 4 ′ = 100 ′ : 400 Arb.

Eine Compagnie bedarf 600 Ellen Tuch zu ihrer Mondirung, das $1\frac{1}{2}$ Elle breit liegt, man will wissen, wie viel Boy zu ihrem Unterfutter gehört, der nur $\frac{7}{8}$ Elle breit ist?

Weil offenbar bey der geringern Breite des Boy mehr Ellen erfordert werden, so müssen, wir hier das Verhältniß der breiten umkehren; und also setzen:

$\frac{7}{8} : 1\frac{1}{2} = 600$ Ellen:

oder $\frac{7}{8} : \frac{2}{3} = 600$,

$$7 : 32 = 600 : \frac{12.600}{7} = \frac{72000}{7} = 1028\frac{4}{7} \text{ Ellen Boy.}$$

Es sey ein Soldat vor 6 Stunden desertirt, und habe bis zur Grenze 13 Meilen, auf deren jede er 2 Stunden Zeit bedarf; man fragt, wie viel Zeit ein zum Nachsetzen Commandirter zu jeder Meile nehmen müsse, um den Deserteur eine Meile von der Grenze einzuholen?

So verwickelt diese Aufgabe zu seyn scheint, so leicht ist sie aufzulösen, wenn wir, um die aus den Bedingungen herzuleitenden, uns in Proportionen zu setzenden Größen zu erhalten, folgendermaßen schließen. Da der Deserteur zu jeder Meile 2 Stunden Zeit bedarf, so ist klar, daß er schon in den 6 Stunden 3 Meilen zurückgelegt hat, folglich bis zur Grenze noch 10 Meilen, und bis zu dem Orte, wo ihn der Commandirte antreffen soll, nur noch 9 Meilen vor sich hat. Ferner, weil der Commandirte nicht alle 13 Meilen, sondern nur 12 Meilen bis zu dem Orte vor der Grenze zurückzulegen hat, so muß er diese in eben der Zeit, als der Deserteur seine 9 Meilen zu erreichen suchen. Es sind nun die Wege von ungleicher Länge also muß der Commandirte auf jede Meile weniger Zeit als der Deserteur zubringen, und mithin das Verhältniß der Meilen umgekehrt gesetzt werden; als

12 M. : 9 M. = 2 Stunden Zeit zu 1 Meile des Deserteur:

oder 4 M. : 3 M. = 2 : $\frac{3.2}{4}$ = $1\frac{1}{2}$ Stunde Zeit des Commandirten.

Zu Montirung einer Compagnie werden 726 Ellen Tuch à $\frac{5}{4}$ breit erfordert. Wenn man nun dazu Unterfutter von $\frac{4}{4}$ Breite nimmt, wie viel Ellen wird man hiervon nöthig haben?

Antw. 450 Ellen.

Wie viel brandenburgische Fuß machen 6 Pariser oder eine Toise?

Nimmt man das Verhältniß des Par. Fuß zum brand. wie 1440 : 1391,3 an, so sind 1440 brand. Fuß = 1391,3 Pariser. Demnach ist

$$1391{,}3 : 1440 = 6 : \frac{6 \cdot 1440}{1391{,}3} = 6\frac{2}{1}\frac{9}{3}\frac{2}{9}\frac{3}{13} \text{ brandb. Fuß.}$$

oder $\frac{6 \cdot 1440}{1391{,}3}$ brandenb. Fuß = $\frac{6 \cdot 144 \cdot 1440}{1391{,}3}$ brandb. Linien

= $893\frac{5}{4}\frac{3}{3}\frac{2}{9}\frac{1}{13}$ Linien = 6 Fuß 2 Zoll $5\frac{5}{1}\frac{3}{3}\frac{2}{9}\frac{1}{13}$ Linien.

Beyspiele zur geraden zusammengesetzten Regel de tri.

Es sey bekannt, daß 8 Mann in 6 Tagen 144 Schachtruthen ausgraben können, wie viel Schachtruthen werden 12 Mann in 3 Tagen ausgraben, wenn sie mit gleichem Fleiß arbeiten?

In diesem Beyspiele erhalten wir also das eine Verhältniß von den Mannschaften, und das andre von der Zeit, welche beyde geradezu genommen werden können; weil wir schließen dürfen: je mehr Mannschaften vorhanden sind; je mehr Arbeit kann gethan werden; also geben sie das Verhältniß 8 Mann : 12 Mann; ferner, da in einer kleinern Zeit weniger gethan werden kann, als in einer größern; so folgt, daß bey diesen das Verhältniß 6 Tage : 3 Tage statt findet; mithin setzen wir:

8 M. : 12 M.
6 T. : 3 T.

also 6. 8. : 3. 12. = 144 Schachtruthen:
2. 6)

4 : 3. = 144:
oder 1 : 3. = 36: 3. 36
= 108 Schachtruthen;

Demnach graben 12 Mann in 3 Tagen 108 Schachtruthen aus.

Eben diese bestimmte 108 Schachtruthen werden gefunden, wenn wir zwey Rechnungen nach der einfachen geraden Regel anstellen, indem wir schließen:

da 8 M. und 12 M. gleiche Zeit arbeiten, so müssen letztere mehr als 144 Schachtruthen ausgraben; mithin ist

8 M. ; 12 M. = 144 Schachtruthen:
oder 1 : 12 = 18 Schachtr. : 12. 18 Schachtruthen.

Ferner: Da in einer kleinern Zeit die 12 Mann weniger, als in einer größern, ausgraben können, so folgt,

6) 6 T : 3 T. = 12. 18 Schacht: = 108 Schacht:

1 : 3 = 2. 18 : 3. 2. 18.

Vergleichen wir nun die Glieder dieser beyden Proportionen gegen einander; so sehen wir, daß das vierte Glied der ersten, sich mit dem dritten der zweyten aufhebt, dadurch eben obiger Ansatz erhellet.

Jemand hat ein Stück Tuch von 6 Ellen Länge und $1\frac{1}{2}$ Elle Breite für 18 Thlr. gekauft, und will noch ein anderes von gleicher Güte mit dem vorigen Preise verhältnißmäßig bezahlen, das 4 Ellen lang und 2 Ellen breit ist; was wird er dafür geben müssen?

Hier können wir gleich schließen, je weniger Länge das Tuch hat, je weniger darf er bezahlen; hingegen auch, je breiter es ist, desto mehr ist es werth, mithin muß man setzen

6 Ellen : 4 Ellen Länge.
$1\frac{1}{2}$ ′ : 2 ′ Breite.

also 6. $1\frac{1}{2}$: 2. 4 = 18 Thlr.:
oder $\frac{2}{3}$: 2. 4 = 3 Thlr.:
oder $\frac{1}{2}$: 2. 4 = 1 Thlr.: 2. 4. 2. = 16 Thlr.
muß er bezahlen.

Man weiß, daß 40000 Thlr. zu 5 pro Cent ausgethan, in 4 Jahren 800 Thlr. Interresse geben, und man frägt; wie viel kann man von 60000 Thlr. in 3 Jahren erhalten?

Je größer das Kapital, um so mehr Interesse hat man zu fordern; und je kürzere Zeit es steht, desto weniger muß man erwarten: folglich wird gesetzt:

4000 Thlr. : 60000 Thlr.
4 Jahr : 3 Jahr

4. 40000. : 3. 60000 = 800 Thlr. Inter.

4000)
4 : 3. 15 = 800 :
oder 1 : 3. 15 = 200 : 200. 2. 15.
= 9000 Thlr. Inter.

Mithin geben 60000 Thlr. in 3 Jahren 9000 Thlr. Interesse.

Hier war nicht nothwendig anzuzeigen; auf wie viel pro Cent das Kapital ausgethan war, (unter welchen Ausdruck immer verstanden wird, wie viel Interesse man von 100 Thlr. in einem Jahre erhält) weil sie selbst nicht mit in Rechnung gesetzt werden durften.

Diese Art Rechnung die im gemeinen Leben häufig vorkommt heißt Intereßrechnung.

Wie viel Souverains müssen für 200 Ducaten gegeben werden, wenn 16 Ducaten = 9 Frd'or, 5 Frd'or = 4 Carolinen, und 27 Carolinen = 46 Souverains sind?

Hier hat man folgenden Ansatz:

16 Duc. : 9 Fr'd.
5 Fr'd. : 4 Carol.
27 Carol : 46 Souv.

16. 5. 27 : 9. 4. 40 = 200 Duc. :

oder 2. 3 : 1 = 200 : $\frac{200}{2.3}$ = $133\frac{1}{3}$ Souverains.

Beyspiele zur verkehrten zusammengesetzten Regel de tri.

Wenn 36 Arbeiter in 6 Tagen 648 Schachtruthen ausgraben, wie viel Zeit müssen 48 Arbeiter gebrauchen, die mit gleicher Thätigkeit 846 Schachtruthen ausgraben wollen?

Weil von der **Zeit** die Frage ist, so müssen wie bei Bestimmung der Verhältnisse bloß auf sie Rücksicht nehmen, und sprechen: da mehr Schachtruthen gegraben werden sollen, so erfordern dieselben mehr Zeit, mithin muß das Verhältniß der Schachtruthen gerade zugenommen werden, also 648 : 846 weil hingegen auch desto weniger Zeit erforderlich ist, je mehr Arbeiter gegeben werden; so folgt, daß das Verhältniß der Arbeiter umgekehrt, also 48 : 36 zu nehmen ist; mithin setzen wir:

648 Schachtr. : 846 Schachtr.
48 Arbeiter : 36 Arbeiter

6) 648. 48 : 846. 36 = 6 Tage :

9) 648. 8 : 846. 36 = 1 :

36) 72. 8 : 94. 36 = 1 :

2. 8 : 94. = 1 : $\frac{94}{16}$ = $5\frac{7}{8}$ Tag müssen also 48 Arbeiter an 846 Schachtruthen arbeiten.

Es sey bekannt daß ein Commando um einen Marsch von 30 Meilen zurückzulegen 10 Tage gebraucht, wenn es täglich 7 Stunden marschirt; nun werde gefragt, wie viel Tage es nöthig einen

Weg von 20 Meilen zu machen, wenn es täglich mit voriger Geschwindigkeit 10 Stunden marschirt?

Das bloß die Tage in Anschlag kommen, so können wir schließen: weil 20 Meilen weniger erfordern als 30 Meilen so muß deren Verhältniß geradezu genommen werden, weil man aber auch weniger braucht, wenn täglich 10 Stunden statt 7 Stunden marschirt wird, so muß man das Verhältniß der letztern verkehrt nehmen, und mithin setzen:

30 Meilen : 20 Meilen
10 Stunden : 7 Stunden

10) 30. 10 : 20. 7 = 10 Tage:

30. : 20. 7 = 14 T:
oder 3. : 2. 7 = 1 : $\frac{14}{3}$ = $4\frac{2}{3}$ Tage.

Diese sind demnach erforderlich d. h. am 5ten Tage wird das Commando im Orte der Bestimmung anlangen.

Von einem bestimmten Proviantvorrath können 6000 Mann 4 Monath zehren wenn ein jeder täglich 1 Pfund 4 Loth Brod erhält; wie viel kann jedem Mann eines Corps von 5000 Mann täglich gereicht werden wenn dieser Proviantvorrath 6 Monath lang dauern soll?

Da hier von gleichem Proviantvorrath die Rede ist, so muß jedem Mann des Corps von 5000 Mann mehr gereicht werden können, daher wie das Verhältniß 5000 M. : 6000 M. erhalten weil aber desto weniger ausgegeben werden darf, je länger man davon leben soll; so müssen wie auch das Verhältniß der Zeiten verkehrt nehmen; demnach sehen wir:

5000 Mann : 6000 Mann
6 Monath : 4 Monath.

5000. 6 : 6000 4 = 1 Pf. 4 Loth.

6. 1000)

5. : 4 = 36 L : $\frac{4.36}{5.}$ = $28\frac{4}{5}$ L.

125 Soldaten können mit 8000 Thlr. 1 Jahr lang besoldet werden, wie lange wird man 2150 Soldaten mit 309600 Thlr. auf gleiche Art besolden können?

2150 Soldaten : 125 Soldaten
8000 Thlr. : 309600 Thlr.

2150. 80 : 125. 3096 = 1 Jahr.
8. 100) 21500 : 125. 387 = 1 Jahr.
125) 172 : 387 | $2\frac{43}{172} = 2\frac{1}{4}$
344 | Jahr.
43 |

Für eine gewisse Fracht von 100 Centnern Pulver bezahlet man auf 20 Meilen 400 Thlr. wie viel Centner wird man nach gleicher Bedingung für 500 Thlr. auf 10 Meilen fahren müssen?

400 Thlr. : 500 Thlr.
10 M. : 20 M.

2. 1000) 4 : 10 = 100 Centner:
2 : 5 = 100 (5
2) 500
250 Centner

Beyspiele zur Gesellschaftsrechnung.

Drey Personen vereinigten sich zu einem Handel, nach welchem die erste 2500 Thlr. die zweite 3700 Thlr., die dritte 5800 Thlr hergab; nach einer gewissen Zeit gewannen sie mit ihrem Gelde 50000 Thlr.; es wird gefragt: wieviel jede von diesem Gewinnst erhalten muß?

Hier sehen wir sogleich, daß nicht jede gleichviel erhalten kann, sondern daß die Theilung nach dem Verhältniß ihres Beitrags geschehen muß; weshalb wir der gegebenen Regel folgen, und setzen:

Die erste Person gab 2500 Thlr.
" zweyte " " 3700 "
" dritte " " 5800 "

sämmtliche Personen 12000 Thlr. und nun

a) 12000 Thlr. : 50000 Thlr. = 2500 :

1000) 12 : 50 = 2500 :

4) 3 : 50 = 625 : $\frac{625.50}{3}$

= $10416\frac{2}{3}$ thl. Gewinnst der ersten.

b. 12 : 50 = 3700

4) 3 : 50 = 925 : $\frac{46250}{3}$

= $15416\frac{2}{3}$ Thl. der zweiten.

c. 12 : 50 = 5800 :

4) 3 : 50 = 1450 : $\frac{72500}{3}$

= $24166\frac{2}{3}$ Thaler der dritten

Demnach sehn wir, wie die Gewinnste dieser Personen verschieden und nach allem Rechte zugetheilt sind, welches dadurch bestätigt wird, daß ihre Summe genau 50000 Thl. beträgt.

Ein Mann habe nach seinem Tode 36000 Thaler hinterlassen, und im Testamente verordnet, daß seine Frau von diesem Vermögen die Hälfte haben, das übrige aber also unter seine 3 Kinder vertheilt werden solle, daß sich der Antheil des ersten zum Antheil des zweiten, wie 2 zu 3; hingegen der Antheil des zweyten zum Antheile des dritten, wie 4 zu 5 verhalten soll; man frägt wie viel jedem Kinde zukomme?

So verwickelt diese Aufgabe zu seyn scheint, so läßt sie sich doch folgendermaßen leicht auf eine der vorigen ähnli= Art zurückbringen; denn erstens ist einleuchtend, daß die Kinder nicht mehr, als 18000 Thaler erhalten können, weil die Mutter die Hälfte des Kapitals für sich nimmt; demnach kömmt es bloß darauf an, aus den gegebnen Verhältnissen andre zu finden, von denen die zweyte Größe des ersten Verhältnisses, der ersten Größe des zweyten gleich ist, welches ge=

schiehet, wenn wir die ersten Glieder des andern mit 3 multipliciren, wodurch ihre Verhältnisse unverändert bleiben; also ist.

$$2 : 3 = 8 : 22,$$
$$4 : 5 = 12 : 15,$$

und wir haben also die Zahlen 8, 12 und 15 erhalten, nach welchen die Erbschaft der Kinder getheilet und gesetzt werden kann.

Das erste Kind erhält 8 Theile von der Erbschaft
" 2te " " 12 " " " "
" 3te " " 15 " " " "

$$35 : 18000 = 8 :$$
$$\text{oder } 7 : 3600 = 8 : \frac{8.3600}{7}$$
$$= 4114\tfrac{2}{7} \text{ thl. Anth. d. 1.}$$
$$7 : 3600 = 12 : \frac{12.3600}{7}$$
$$= 6171\tfrac{3}{7} \text{ thl. Antheil des 2ten}$$
$$7 : 3600 = 15 : \frac{15.3600}{7}$$
$$= 7714\tfrac{2}{7} \text{ Anth. d. 3ten.}$$

Man hat einen Vorrath von 18000, 24pfündge, 40000 12pfündge, und 60000, 6pfündge Kanonenkugeln, mit welchen man die Festungen A, B und C versehen will, und man weiß vermittelst eines Etats, daß A von jeder Sorte 4000 erhalten muß, wenn B 2500 und C 15000 erhält; nun wird gefragt, wie viel Kugeln müssen dem Etate gemäß von diesem Vorrathe nach den drey Festungen versendet werden?

Hier schließen wir, weil nach dem Etat die Festung
A 4000 erhält,
wenn B 2500
und C 1500, so folgt,

---

daß sämtl. Fest. 8000 erhalten; mithin setzen wir:

a) 8000 : 4000 = 18000, 24pfündge :
oder 2 : 1 = 18000, 24pfündge : 9000, 24pfündge
Kugeln, welche A bekömmt.

b) 8000 : 2500 = 18000, 24pfündge :
oder 4 : 2500 = 9, 24pfündge :
oder 1 : 625 = 9, 24pfündge : 625 . 9 = 5625, 24pfündge
Kugeln, welche B bekömmt.

c) 8000 : 1500 = 18000, 24pfündge:
oder 4 : 1500 = 9, 24pfündge :
oder 1 : 375 = 9, 24pfündge : 9 . 375 = 3375, 24pfündge
Kugeln, welche C bekömmt.

Verfährt man auf ähnliche Weise mit den gegebenen 40000, 12pfündgen und 60000, 6pfündgen Kugeln, so finden wir den ganzen Vorrath folgendermaßen in den drey Festungen vertheilet:

Die Fest.	A erhält	9000,	24pfdge,	20000,	12pfdge,	30000,	6pfdge
	B "	5625	"	12500	"	18750	"
	C "	3375	"	7500	"	11250	"
also ist d. Vorrath		18000,	24pfdge,	40000,	12pfdge,	60000,	6pfdge.

Drey Personen sollen den Gewinn eines Schiffes unter sich theilen. Die erste hat 20000 Thlr. die zweyte 60000 Thlr., die dritte 120000 Thlr. im Handel gegeben; man fragt, wie viel hierauf eine jede bekommen muß, wenn der Gewinn nach Abzug der Kosten 800000 Thlr. beträgt?

Man sieht, daß darauf 800000 Thlr. in drey Theile zu theilen, die sich unter sich, wie 20000, 60000, 120000, oder 1, 3, 6 verhalten, weil ein jeder nach Verhältniß seines im Handel gegebenen Capitals haben muß. Man muß also die drey Theile 1, 3, 6 addiren und folgende drey Proportionen machen, oder deren nur zwey.

10 : 800000 = 1 Thlr. : dem ersten Theile
" : " = 3 " : " zweyten "
" : " = 6 " : " dritten "
diese drey Theile sind also 80000 Thlr., 240000 Thlr., 480000 Thlr.

Die Aufgabe könnte viel verwickelter seyn, und dennoch auf eben diese Regeln zurückgeführt werden, wie im folgenden Beyspiele.

Drey Personen haben einen gemeinschaftlichen Handel angefangen; die erste giebt dazu ein

Capital von 3000 Thlr. auf 6 Monat;
die zweite ein " " 4000 " " 5 "
die dritte " " " 8000 " " 9 "

Wie viel muß ein jeder von den Gewinnst, welcher sich auf 12050 Thlr. beläuft, haben?

Man bringt auf folgenden Wege alle Capitalien, auf einerley Zeit:

Das Capital 3000 Thlr. bringt offenbar in 6 Monaten so viel ein, als 6 mal 3000 oder 18000 in einem Monat.

Das Capital 4000 Thlr. bringt in 5 Monat augenscheinlich so viel ein, als 5mal 4000, oder 20000 Thlr. in einem Monat.

Endlich das Capital von 8000 Thlr. bringt in 9 Monat so viel ein, als 9 mal 8000 = 72000 Thlr. in einem Monat.

Die Aufgabe ist also auf diese zurückgebracht; die Capitalien der drey Associerten sind 18000 Thlr., 20000 Thlr., 72000 Thlr.; wie viel bekömmt ein jeder von dem Gewinnst 120 Thlr.?

Man habe 3000 Centner Pulver 20 Meilen weit nach der Festung A, 2000 Centner 25 Meilen weit nach B und 1800 Centner 40 Meilen weit nach C abzusenden, deren Transport drey Schiffer für 800 Thlr. besorgen wollen; es wird gefragt: wie viel Geld muß der erste, so nach A, der zweyte, so nach B, und der dritte, so nach C gehet, erhalten?

Mit dieser Aufgabe hat es eine ähnliche Bewandniß, wie mit der Vorhergehenden, man muß hier trachten alles auf einerley Weg zu bringen, und dieses geschiehet, wie folgt: 3000 Centner auf 20 Meilen transportirt, müssen eben so viel Geld kosten, als 20 mal 3000 Centner oder 60000 Centner auf eine Meile; eben so 20000 Centner auf 25 Meilen so viel als 25 . 2000 Centner, oder 50000 Centner auf eine Meile; endlich auch 1800 Centner auf 40 Meilen so viel, als 40 . 1800 Centner, oder 72000 Centner auf eine Meile, mithin haben wir

die

die akkordirten 800 Thlr. nach der Menge dieser gefundenen Centner unter die drey Schiffer einzutheilen, und wir können deshalb, wie gewöhnlich setzen:

Der erste Schiffer hat 60000 Centner.
" zweyte " " 50000 "
" dritte " " 72000 "

Sämmtliche Schiffer haben 182000 Centner zu transportiren, und folglich, da jene Zahlen sich wie 30, 25, 36 und 91 verhalten, so ist

a, $91 : 30 = 800 : \frac{30.800}{91} = 263\frac{67}{91}$ Thl. der Antheil des ersten

b, $91 : 25 = 800 : \frac{25.800}{91} = 219\frac{71}{91}$ Thl. der Anth. des zweyten

c, $91 : 36 = 800 : \frac{36.800}{91} = 316\frac{44}{91}$ Thl. der Anth. des dritten

und sämmtliche Schiffer erhalten 800 Thl.

In dieser und der vorhergehenden Aufgabe, und in einigen folgenden, finden wir nun, daß eigentlich die unbekannten Größen nach Größen zusammengesetzter Verhältnisse bestimmt worden sind, daher auch ihre Rechnung die zusammengesetzte Gesellschafts-Rechnung genannt wird, denn die gefundenen Größen $263\frac{67}{91}$ Thl., $219\frac{71}{91}$ Thl. und $316\frac{44}{91}$ Thl. mußten mit den Größen 60000 Centner, 50000 Ctn. 72000 Ctn. nach der Ordnung gleiche Verhältnisse machen; welche letztere von den zusammengesetzten Verhältnissen der Größen 3000 Ctn., 2000 Ctn., 1800 Ctn., und 20 Meilen, 25 Meilen und 40 Meilen, nemlich

von { 3000 Ctn. : 2000 Ctn. / 20 M. : 25 M. } und { 2000 Ctn. : 1800 Ctn. / 25 M. : 40 M. }

genommen würden.

Es legte jemand 2000 Thl. in einen Handel; als ein Jahr verflossen war, kam ein anderer, und bat erstern, von ihm 1800 Thl. dazu zu nehmen, welches auch geschah, eben so kam ein drit-

ten Jahr ein dritter, und gab dazu 2600 Thl.; und endlich im vierten Jahr ein vierter, der 3600 Thl. beylegte. Nachdem nun noch drey Jahr verflossen waren, bemerkte die Gesellschaft, daß sie mit dem Gelde 50000 Thl. gewonnen hatte, und kam überein, dieses Capital unter sich zu theilen; man frägt: wie viel jeder von ihnen erhalten mußte?

So verwickelt die Aufgabe scheint, so kann man sie doch leicht auflösen, wenn man auf die mit den Größen verbundenen Bedingungen achtet, und nach denselben also schließet: Vorerst ist einleuchtend, daß der Gewinnst nicht allein nach der Größe des Beytrags eines jeden, sondern auch nach der Länge der Zeit, in welcher er benutzet war getheilt werden muß, weshalb wir die Summe ihrer Beyträge gar nicht in Betrachtung ziehen, sondern suchen müssen, wie lange eines jeden Beytrag eigentlich gewuchert hat, welches wir finden, wenn wir gerade rückwärts gehen, und sagen: als des letzten Beytrag geschehen war, dauerte der Handel noch 3 Jahr, mithin standen

des 4ten seine 3600 Thl. offenbar 3 Jahr.
" 3ten " 2600 " " 4 "
" 2ten " 1800 " " 5 "
" 1ten " 2000 " " 6 "

im Handel.

Ferner: da von selbst einleuchtet, daß 3600 Thl. in 3 Jahren nicht mehr als 3 mal 3600 Thl. in einem Jahre und eben so 2600 Thl. in 4 Jahren nicht mehr als 4 mal 2600 Thl. in 1 Jahr u. s. w. bringen können, so folgt wenn wir die Größen in umgekehrter Ordnung nehmen daß

2000 Thl. in 6 J.	so viel als	6. 2000 Thl. in 1 J.	=	12000
1800 " " 5 "	"	5. 1800 " " 1 "	=	9000
2600 " " 4 "	"	4. 2600 " " 1 "	=	10400
3600 " " 3 "	"	3. 3600 " " 1 "	=	10500
und 10000 Thl. in 6 Jahr	zu verschiedenen Zeiten	42200 Thl. in 1 Jahr.		

nemlich 50000 Thl. bringen.

Hierdurch ist nun die Aufgabe in eine gewöhnliche verwandelt, wo wir die Theile von 50000 Thl. nach den Theilen der Summe 42200 Thl. bestimmen, oder da sich diese Theile und ihre Summe wie die Zahlen 60, 45, 52, 54 und 211 verhalten, so können wir setzen:

a, 211 : 60 = 50000 Thl. : $\frac{60.50000}{211}$ = 14218 $\frac{2}{211}$ Th. Antheil des ersten

b, 211 : 45 = 50000 Thl. : $\frac{45.50000}{211}$ = 10663 $\frac{107}{211}$ Thl.

c, 211 : 52 = 50000 Thl. : $\frac{52.50000}{211}$ = 12332 $\frac{58}{211}$ Thl.

d, 211 : 54 = 50000 Thl. : $\frac{54.50000}{211}$ = 12796 $\frac{44}{211}$ Thl.

---

und es ist die getheilte Summe 50000 Thl.
wie sie seyn sollte.

Es sey ein Manövre mit 12 Regimentern und 6 Grenadier-Bataillons zu machen, wozu man 2 Batterien 12pfündge Kanons zu 10 Stück verlangt; außerdem aber für jedes Grenadier-Bataillon 2, 6pfündge und für jedes Regiment 2, 3pfündge Kannons. Für das sämmtliche Geschütz sind 24 Centner Pulver bestimmt. Nun wird gefragt wie viel Pulver zu jeder Art Geschütz genommen werden muß, damit jedes eine gleiche Menge Schuß erhalte, wenn der Zwölfpfünder mit $1\frac{1}{2}$ Pfund der Sechspfünder mit 1 Pfund und der Dreypfünder mit $\frac{3}{4}$ Pfund geladen wird?

Vorerst müssen wir hier die Menge Geschütz genauer bestimmen, nachher jede besondere Art mit der Schwere ihrer Ladung multipliciren, wo dann die Producte die Theile geben, nach welchen das gegebene Pulver getheilet werden muß.

Demnach sagen wir: da 2 Batterien 12pfündge Kanons

genommen werden, so sind es in allem 20 Stück, und weil jeder Schuß von ihnen $1\frac{1}{2}$ Pfund Pulver enthält, so beträgt 1 Schuß aus allen gethan 30 Pfund. Ferner: weil jedes Grenadier-Bataillon 2 Sechspfünder bekömmt, so müssen in allem 2. 6 = 12 Sechspfünder gegeben werden; und weil jedes 1 Pfund Ladung erhält, so beträgt ein Schuß aus allen gethan, 12 Pfund. Endlich, da jedes der 12 Regimenter 2 Dreypfünder haben soll, so hat man in allem 2. 12 = 24 Dreypfünder, welche offenbar, weil jedes mit $\frac{3}{4}$pfündiger Ladung versehen wird, zu einem Schuß 24. $\frac{3}{4}$ Pfund = 18 Pfund erfordern.

Es müssen sich also die Theile der 24 Ctn., oder 24. 110 Pf. = 2640 Pf., die jeder Art Geschütze zukommen, wie 30 Pf., 12 Pf. und 18 Pf., gegen einander verhalten, und wir können setzen:

1 Schuß bey den 12pfündern verlangt 30 Pf.
" " " " 6 " " " 12 "
" " " " 3 " " " 18 "

---

1 Schuß bey sämmtlichen Geschütz verlangt 60 Pfund.

Da die Größen 30 Pf., 12 Pf., 18 Pf. und 60 Pf., sich wie die Zahlen 5, 2, 3 und 10 verhalten, so folgt

a, 10 : 5 = 2640 Pf. 1320 Pf. : als die Menge Pulver, die zu den 12pfündnern kommt.
b, 10 : 2 = 1640 Pf. : 528 Pf. " 6 " "
c, 10 : 3 = 2640 Pf. : 729 Pf. " 3 " "

in allen 2640 Pf. zu sämmtlichen Kanons.

davon jedes 44 Schuß erhalten muß, welches wir aus den Proportionen unmittelbar erkennen können, weil die Menge Pulver, die zu jeder Art Geschütz gegeben wird, sich zu der Menge Pulver, die zu einem Schuß aus ihm verbraucht wird, genau so verhalten muß, als die Anzahl Schüsse zu einem einzigen.

Es ist nicht unnütz hier noch einen Fall zu erörtern, bey welchem Anfänger Schwierigkeiten finden möchten. Gesetzt es soll 650 in drey Theile getheilt werden, wovon der erste sich zum zweyten verhält = 5 : 4, und der zweyte zum

dritten = 7 : 3, so kann man hier die gegebene Regel ohne eine Vorbereitung nicht anwenden, welche darin besteht, in jedem gegebenen Verhältniß einen proportionalen Theil der drey gesuchten Theile, gleich zu machen. Z. B. das erste Glied in jedem Verhältnisse, dieses wird leicht ausgeführt, wenn man die zwey Glieder eines jeden Verhältniß, durch das Glied des andern Verhältniß multiplicirt; Also die beyden Verhältnisse 5 : 4 und 7 : 3, erhalten ein gleiches Vorderglied, wenn man die zwey Glieder des ersten mit 7, und die zwey Glieder des zweyten durch 5 multiplicirt, welches bekanntlich das Verhältniß nicht ändert, und giebt die Verhältnisse 35 : 28 und 35 : 15, so daß sich die Aufgabe darauf reducirt 650 in drey Theile zu theilen die sich wie 35, 28 und 15 verhalten; welches leicht nach der gegebenen Regel geschehen kann.

Will man eine Zahl in vier Theile theilen, wovon der erste sich zum zweyten verhält, wie 5 : 4 der erste zum dritten wie 9 : 5, und der erste zum vierten wie 7 : 3, so giebt man diese Verhältnisse dadurch einerley Vorderglied, indem man die zwey Glieder eines jeden Verhältnisses, mit dem Producte der Vorderglieder der beyden andern Verhältnisse multiplicirt: also in diesem Beyspiele ändert man diese drey Verhältnisse, in diese drey um, 315 : 252, 315 : 175, 315 : 135; dergestalt ist die Aufgabe nun diese, die vorgegebene Zahl in vier Theile zu theilen die sich unter sich verhalten wie 315, 252, 175 und 135.

Man soll unter den Oertern A, B, C, einen Vorrath von Werkzeugen folgendermaßen vertheilen: 4500 Spaden (bêches), 2500 Hackenhauen (pics-hoyaux), 4550 Radehauen (pioches), 820 Spitzhauen*) 820 Steinhauen (pics-à-roc), 2200 Grabscheide (escoupes), 2210 Faschinenmesser (serpes) und 800 Beile (haches). Diese Vertheilung soll für jede Art Werkzeuge, nach Verhältniß und einer Provisions-Vorschrift gemäß vertheilt werden. Hiernach sollen nemlich von 8500 Werkzeugen einer Art; A, 6000, B, 1400 und C, 1100 bekommen. Man frägt wie viel jeder dieser Oerter von jeder Art bekomme?

*) Bey Bezout stehet pics-à-tête.

Provisions-Vorschrift.

Der Ort A : : 6000
: : B : : 1400
: : C : : 1100

8500

Weil jede Art der Werkzeuge nach dem Verhältnisse der Zahlen, 6000, 1400, 1100 vertheilt werden soll, so findet man, wie viel ein jeder Ort davon von irgend einer Art haben soll, z. B., Spaden, wenn man das vierte Glied von jeder der folgenden drey Proportionen berechnet.

8500 : 4500 oder 17 : 9 = 6000:
17 : 9 = 1400:
17 : 9 = 1100:

Auf dieselbe Art berechnet man auch die Anzahl der Hackenhauen, Radehauen u. s. w. welche in jedem Orte vertheilt werden sollen, und man wird finden daß die Vertheilung so geschehen muß als folgende Tabelle zeigt.

		Werkzeuge.		
		Für A	Für B	Für C
4500	Hacken	3177	741	582
2500	Hackenhauen	1765	412	323
4550	Radehauen	3212	749	589
820	Spitzhauen	579	135	106
820	Steinhauen	579	135	106
2200	Grabscheide	1553	362	285
2210	Faschinenmesser	1560	364	286
800	Beile	565	132	103
18400		12990	3030	2380

Drey Schiffer sollen unter sich 1500 Thl. vertheilen, und zwar nach einem Verhältnisse, das folgende Angabe lehrt. Der erste hat 2000 Centner 50 Meilen; der zweyte hat 1500 Centner 75 Meilen; und der dritte 3000 Centner 60 Meilen weit gefahren.

Man frägt was jedem zukommt?

Um diese Aufgabe auf die vorhergehende Regel zu bringen muß man, die verschiedenen Transporte, auf einerley Entfernung reduciren, und zwar auf folgende Art.

2000 Ctn. 50 Meilen weit gefahren, müssen eben so viel bezahlen, als 50 mal 2000 Ctn. oder 10000 Ctn. eine Meile weit gefahren. Desgleichen 1500 Ctn. 75 M. weit, eben so viel als 75 mal 1500 Ctn. oder 112500 Ctn. auf 1 Meile weit. Endlich 3000 Ctn. 60 weit, eben so viel als 60. 3000, oder 180000 Ctn. auf eine Meile weit.

Die Aufgabe ist also die nemliche, als wenn drey Schiffer auf einerley Entfernung, der erste 10000 Ctn. der zweyte 112500 Ctn. und der dritte 180000 Ctn. zu fahren hätte. Es kommt also darauf an 1500 Thl. in drey den Zahlen 10000, 112000 und 180000, oder den Zahlen 4, 45 und 72 proportional zu theilen, wir suchen daher das vierte Glied der drey folgenden Proportionen:

$(4 + 45 + 72)$ oder $121 : 4 = 1500$ Thl. : $\frac{4 \cdot 1500}{121}$ Thaler.

$121 : 45 \quad 1500$ Thl. : $\frac{45 \cdot 1500}{121}$ Thlr.

$121 : 72 = 1500$ Thl. : $\frac{72 \cdot 1500}{121}$ Thlr.

Der Armee-Park bestehet aus 156 Stück Kanonen. Man will aus dieser Armee drey Abtheilungen machen, so daß die Kraft der ersten Abtheilung sich zur Kraft der zweyten wie 5 : 4, und die der ersten zu der Kraft der dritten wie 7 : 3. verhält. Es kommt also darauf an, die Artillerie den Kräften welche diese drey Abtheilungen haben sollen, proportional zu vertheilen.

Da die Kraft der ersten Abtheilung durch 5 in dem ersten Verhältniß vorgestellt ist, und durch 7 in dem zweyten, so muß man vor allen Dingen dahin sehen, diese Kraft auf einerley Zahl zu bringen, welches leicht wie schon weiter oben gewiesen ist

geschieht, indem man die zwey Glieder des ersten Verhältnisses mit 7 multiplicirt, und die zwey Glieder des zweyten Verhältnisses mit 5, wodurch diese Verhältnisse nicht verändert werden. Alsdann müssen die Kräfte, der ersten, zweyten und dritten Abtheilung respektive wie die Zahlen 35, 28 und 15 seyn. Es wird also erfordert die Zahl 156 in drey den Zahlen 35, 28 und 15 proportionale Theile zu theilen, dieses wird wie in den vorhergehenden Beyspielen verrichtet, und giebt 70, 56 und 30.

Von einigen andern von den Proportionen abhangenden Regeln.

Einfache Regel Falsi.

188.

Obgleich die folgenden Regeln von einem mindern Gebrauche als die vorhergehenden sind, so dürfen wir sie doch nicht gänzlich übergehen: Außerdem daß sie durch sich selbst nicht ganz ohne Nutzen sind, sind sie übrigens ganz dazu geeignet den Gebranch der Proportionen recht fühlbar zu machen.

Die erste wovon wir reden werden, ist die sogenannte Regel Falsi. Man wendet sie oft an, Fragen aufzulösen, die zur Gesellschafts-Rechnung gehören. von welcher sie sich darin unterscheidet, daß statt solche proportionale Theile, als durch die Aussage der Frage gegeben sind, sie einen Theil davon willkührlich annimt, und die übrigen daraus der Frage gemäß bestimmt; wodurch die Rechnung etwas leichter wird.

Erstes Beyspiel.

640 Pf. unter drey Personen zu vertheilen, so daß die zweyte das vierfache der ersten, und die dritte, zwey ein drittel mal so viel als die beyden andern zusammen erhält.

Man nimmt willkührlich, um den ersten Theil vorzustellen, die Zahl 3, von welcher man bequem $\frac{1}{3}$ nehmen kann.

Da der erste Theil 3 ist,
so ist ' ' ' 4 mal 3 = 12
und ' ' ' $2\frac{1}{3}$ (3 + 12) = $2\frac{1}{3}$ 15 = 35

Die Aufgabe ist also darauf zurückgeführt 640, in drey Theile zu theilen die sich unter sich verhalten, wie die drey Zahlen, 3, 12 und 35, welches wie oben gelehrt worden geschieht.

Die Regel Falsi dient auch Fragen aufzulösen, die auf gewisse Art, das Umgekehrte von denen der Gesellschaftsrechnung sind; weil es darauf ankommt, von der Summe einiger Theile einer Zahl, zu der Zahl selbst zurück zu kommen, wie in folgendem Beyspiele.

Zweytes Beyspiel.

Man verlangt eine Zahl, deren $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ und $\frac{3}{7}$ zusammen 808 ausmachen.

Man nimmt eine Zahl von der man bequem $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ und $\frac{3}{7}$ nehmen kann (welches leicht ist, wenn man die drey Nenner in einander multiplicirt).

Diese Zahl wäre 3. 5. 7. = 105:
Man nimmt davon $\frac{1}{3}$ welches 35 ist
' $\frac{1}{5}$ ' 21 '
und $\frac{3}{7}$ ' 45 '

Die drey Zahlen zusammen geben 101, welche Zahl aus den Theilen von 105 eben so zusammengesetzt ist als es 808 von den zu suchenden Theilen ist; die in Rede stehende Zahl muß also dasselbe Verhältniß zu 808 haben, als 105 zu

101; Sie muß also das vierte Glied einer Proportion seyn, die folgende drey Glieder hat.

$$101 : 105 = 808 :$$

Dieses vierte Glied ist 840, also enthält 840 in der That das $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{5}$ und $\frac{3}{7}$.

189.

Aus den bei den zwey gegebenen Beispielen beobachteten Verfahren leuchtet folgende Regel ein.

1) Man nehme statt der unbekanten Zahl eine willkührliche Zahl an, welche man will.

2) Mit dieser willkührlich angenommenen Zahl verfahre man so, wie es den Bedingungen der Aufgabe gemäß ist. Sollte nun hierdurch dasjenige nicht heraus kommen, was eigentlich vermöge den Bedingungen der Aufgabe herauskommen sollte, so setze man nach der Regel Detri so an:

3) Wie sich das falsche Resultat zum wahren verhält, so verhält sich auch die falsche angenommene Zahl zur wahren unbekanten.

Drittes Beyspiel.

A fragt dem B, wie alt er sey, so antwortete ihm B, wenn ich noch einmal so alt, halb so alt, um den dritten Theil so alt und um den sechsten Theil so alt wäre, als ich jetzo bin, so wäre ich 54 Jahre, wie alt war also B?

Gesetzt er wäre 12 Jahre alt, so addire man

zu 12
ſ 12 = 1 mal 12
ſ 6 = $\frac{1}{2}$ ſ 12
ſ 4 = $\frac{1}{3}$ ſ 12
ſ 2 = $\frac{1}{5}$ ſ 12

Summa 36 Jahre anſtatt 54

also ſetzt man nach der Regel de tri an

36 : 54 = 12 Jahre :
oder 3 : 54 = 1 :
oder 1 : 18 = 1 : 18 Jahre.

Die willkührlich gewählte Zahl 12, muß um Brüche zu vermeiden, ſo gewählt werden, daß die Nenner 2, 3 und 6 darin aufgehen, alſo iſt die kleinſte Zahl die dieſe Eigenſchaft beſitzt offenbar die beſte, und die hier der kleinſte gemeinſchaftliche Nenner iſt.

Viertes Beyſpiel.

Es liegen zwey Oerter A und B 36 Meilen von einander, nun gehen von dieſen beyden Oertern zwey Bothen einander entgegen, der erſte C gehet täglich 4 Meilen und der andere D 6 Meilen, in wie viel Tagen werden ſie einander begegnen?

Man nehme an nach 4 Tagen ſo würde
C 4 mal 4 = 16 und
D 6 mal 4 = 24 Meilen, folglich beyde
40 Meilen und daher
40 — 36 = 4 Meilen zu viel.

Nun ſetzt man an
40 : 36 = 4 :
oder 10 : 36 = 4 : 3, 6 Tage.

Freylich hätte man hier weit kürzer und der Sache angemeſſener gerechnet, wenn man ſo geſchloſſen hätte: Beyde Bothen machen zuſammen täglich 4 + 6 = 10 Meilen alſo werden die 36 Meilen von beyden in $\frac{36}{10}$ = 3,6 Tage zurück gelegt.

Fünftes Beyspiel.

Wie groß muß das Kapital seyn, daß man über 6 Jahre 200 Thl. Zinsen erhält zu 4 pro Cent?

Man nehme an 800 Thl. und suche die Zinsen davon nach 6 Jahren: Nun bringen offenbar 800 Thl. in 6 Jahren eben so viel als 6 mal 800 Thl. oder 4800 in 1 Jahr; also

100 : 4800 = 4 Thl. : 48. 4 = 192 Thl.
also 200 — 192 = 8 Thl. zu wenig

Nun setze man an

192 Thl. : 200 Thl. = 800 :
24 ʻ : 25 ʻ = 800 :

$$3 \text{ ʻ} : 25 \text{ ʻ} = 100 : \frac{25.100}{3} = 833 \text{ Thl. } 8 \text{ gr.}$$

Auch dieses rechnet man ohne die Regel Falsi bequemer, indem man schließt 100 geben in 1 Jahr 4 Thlr. Zinsen, also in 6 Jahr, 6 mal 4 = 24 Thlr. Zinsen folglich 24 Zinsen: 200 Thlr. = 100

$$\text{Kapital: } \frac{200.100}{24} = 833 \text{ Thl. } 8 \text{ Gr.}$$

Sechstes Beyspiel.

Ein Vater hinterließ 4 Kinder und ein Vermögen von 3000 Thl., welches nach seinem Tode also vertheilet werden sollte, B sollte $1\frac{1}{2}$ mal so viel als A, C $\frac{1}{3}$ mal so viel als A und B und D $\frac{1}{5}$ mal so viel als A, B, C und die übrigen 60 Thl. erhalten, wie viel wird ein jeder bekommen?

Man setze A bekomme 300 Thl.

so erhält B	$1\frac{1}{2}$	mal	300 =	450 Thl.
C	$\frac{1}{3}$	ʻ	750 =	250 ʻ
D	$\frac{1}{5}$	ʻ	105 =	200 ʻ
			Summa	1200 Thl.

Diese sollen aber 3000 — 60 = 2940 Thl. seyn; daher setze man

1200 : 300 = 2940 :
oder 12 : 3 = 2940 :
oder 4 : 1 = 2940 : $\frac{2940}{4}$ = 735 Thl. erhält A

Probe.

A erhält 735 Thl.
B ; 1102 ; 12 Gr.
C ; 612 ; 12 ;
D ; 550 ;
Summa 3000 Thl.

Doppelte Regel Falsi.

190.

Bey der doppelten Regel Falsi, werden zwey falsche Zahlen angenommen, und hieraus die verlangte Zahl bestimmt.

Ihrer bedient man sich bey Fragen, wenn gefordert wird, nicht die vorgegebene Zahl selbst, sondern nur ein Theil dieser Zahl, nach gegebenen Zahlen in proportionale Theile zu theilen; das folgende Beyspiel wird die Regel und ihren Gebrauch kennen lehren.

Erstes Beyspiel.

Es wird verlangt die Summe von 6954 Thrl, unter drey Personen, dergestalt zu vertheilen, daß die zweyte so viel als die erste hat, und 54 Thlr. drüber; und daß die dritte so viel als die beyden andern zusammen, und 78 Thlr. drüber hat.

Ohne den 54 und 78 Thlr. ist es klar, daß

es nur darauf ankömmt die vorgegebene Zahl in den, den Zahlen 1,1 und 2 proportionalen Theile zu theilen; da man aber von der Summe, 54 Thlr. für die zweyte Person, und 54 Thrl. + 78 Thrl. für die dritte Person im voraus wegnehmen muß; so ist es augenscheinlich, daß es nur ein Theil der vorgegebenen Zahl ist, den man in den Zahlen 1, 1 und 2 proportionale Theile theilen soll: da dieser Theil, welcher in dem gegebenen Beyspiele leicht zu finden ist, schwieriger unter andern Umständen wahrzunehmen seyn kann, so befolgt man nachstehende Methode.

Man nehme für den ersten Theil, was immer für eine Zahl an, z. B. 1 Thlr. so wird der zweyte 1 Thlr. + 54 Thlr. d. h. 55 Thlr. seyn; der dritte Theil wird seyn 1 Thlr. + 55 Thlr. + 78 Thlr. d. h. 134 Thlr. die ganze Summe dieser Theile ist 190 Thlr.

Wenn die Frage gewesen wäre, die Zahl nur in den, den Zahlen 1,1 in 2 proportionale Theile zu theilen, und der erste Theil immer 1 Thlr. angenommen ist, so wäre der Zweyte 1 Thlr. und der dritte 2 Thlr. und die ganze Summe wäre 4 Thlr. also die Differenz von 190 Thlr. d. h. 186 Thlr. ist dasjenige was man im voraus von der vorgegebenen Summe 6954 Thlr. wegnehmen muß, welches sie auf 6768 Thlr reducirt. Es bleibt also 6768 Thlr. nach oben gegebenen Regeln zu theilen, in Theile die sich wie 1,1 und 2 verhalten, und nachdem man gefunden hat, daß der erste Theil 1692 Thlr. so wird man hieraus

schliessen daß die beyden andern geforderten Theile 1746 Thl. und 3516 Thl. sind; und wirklich ist die Summe dieser drey Theile 6954 Thl.

191.

Man kann hier auch folgende Regel befolgen.

1) Man nimmt hier statt der gesuchten Zahl zwey ungleiche willkührliche Zahlen an, und verfährt mit jeder besonders, wie bey der einfachen Regel Falsi angegeben ist, allemal nach den Bedingungen der Aufgabe. Hierdurch erhält man aber 5 bekannte Zahlen, zu welchen die unbekannte 6te zu suchen ist. Die 5 bekannten Zahlen sind nemlich die beyden angenommen falschen, und die beyden herausgebrachten, und diejenige, welche das eigentliche Resultat angiebt. Man bezeichnet die beyden angenommenen falschen Zahlen durch A und B und die zu suchende unbekannte durch x, ferner bezeichne man diejenige Zahl, welche aus A wird, mit a und diejenige, welche aus B wird, mit b: und endlich diejenige, welche zuletzt das gesuchte Resultat seyn soll, mit C.

2) Nun setze man nach der Regel Detri an

$$a - b : a - C = A - B : A - x.$$

Wenn auf diese Weise die Differenz

der unbekannten und einer von den falschen angenommenen Zahlen gefunden ist, so ergiebt sich von selbst die Unbekannte.

Zweytes Beyspiel.

72 Personen, Männer und Weiber verzehrten in einem Wirthshause 15 Thl., jede Mannsperson zahlte aber 9 Gr. und jede Frau 3 Gr. es ist die Frage, wie viel Männer und wie viel Weiber sind es gewesen?

Man setze, es seyn gewesen

Männer = 16 a 9 Gr. machen 144 Gr.
also Weiber = 56 a 3 Gr. = 168 Gr.

Summa 312 Gr.

Ferner setze man die Anzahl

der Männer 6 a 9 gr. machen 54 Gr.
also der Weiber 66 a 3 gr. = 198 Gr.

Summa 252 Gr.

Es sollen aber alle Personen 15 Thl. oder 360 Gr, verzehrt haben, demnach wäre im ersten Falle 360 — 312 = 48 Gr. und im zweyten 360 — 252 = 108 Gr. zu wenig,

Hier ist nun A = 16, a = 312, B = 6, b = 252 und C = 360.

also setzt man an

a — b : ā — C = A — B : A — x
d. h. 312 — 252 : 312 — 360 = 16 — 6 : 16 — x
oder 60 : 312 — 360 = 10 : 16 — x

Das zweyte Glied dieser Proportion nemlich 312 — 360 zeigt dadurch, daß 360 nicht von 312 abgezogen werden kann, an, daß die gesuchte Zahl x grösser als die angenommene A ist und daß also auch x nicht von A abgezogen werden kann, man kann aber in solchen Fällen auch die Proportion so schreiben.

a — b : C — a = A — B : x — A
d. h. 60 : 360 — 312 = 10 : x — 16
oder 60 : 48 = 10 : x — 16

$$\text{mithin } x - 16 = \frac{48 \cdot 10}{60} = 8$$

d. h. x übertrift 16 um 8, folglich ist x = 24 daher waren es 24 Männer und 48 Weiber.

Drittes Beyspiel.

Ein Vater hinterließ 10 Kinder und ein Vermögen von 3780 Thl., welches nach seinem Tode also vertheilet wurde: Es sollte nemlich jeder Sohn 5 Thl. von 54 Thl. erhalten, wenn jede Tochter 6 Thl. erhalten würde, wie viel waren es Söhne und Töchter?

Man setze es waren

Söhne 8 a 5 Thl. machen 40 Thl.
folglich Töchter 2 a 6 Thl. = 12 Thl.

Summa 52 Thl.

Ferner setze man, es waren

Söhne 5 a 5 Thl. machen 25 Thl.
folglich Töchter 5 a 6 Thl. = 30 Thl.

55 Thl.

Setzt man hier die Werthe für die Buchstaben, und schließt wie bey der vorhergehenden Aufgabe, so hat man

$$52 - 55 : 52 - 54 = 8 - 5 : 8 - x$$
$$\text{oder } 55 - 52 : 54 - 52 = 8 - 5 : 8 - x$$
$$\text{d. h. } 3 : 2 = 3 : 8 - x$$
$$\text{oder } 1 : 2 = 1 : 8 - x$$
$$\text{mithin } 8 - x = 2$$

eine Zahl x aber die von 8 abgezogen 2 übrig läßt ist offenbar 6, also waren es 6 Söhne, und 4 Töchter.

Viertes Beyspiel.

Ein Weinhändler hat dreyerley Sorten Wein er will diese mit einander vermischen, um 48 Maaß zu erhalten; wovon jedes Maaß 10 Gr. werth ist, wie viel wird er von den 3 Sorten A, B, C nehmen müssen, wenn ein Maaß von A 16 Gr. von B, 9 Gr. und von C 4 Gr. gilt?

Man setze, oder nehme von

	A	12	Maaß à 16 Gr.	machen	192 Gr.
von	B	14	″ à 9 Gr.	″	126 Gr.
″	C	22	″ à 4 Gr.	″	88 Gr.
					Summa 406 Gr.

Ferner setze man, oder nehme von

	A	6	Maaß à 16 Gr.	machen	96 Gr.
von	B	20	″ à 9 Gr.	″	180 Gr.
″	C	22	″ à 4 Gr.	″	88 Gr.
					364 Gr.

In der Vermischung sollen 48 Maaß à 10 Gr. 480 Gr. kosten, mithin hat man

406 — 364 : 406 — 480 = 12 — 6 : 12 — x

oder

42 : 480 — 406 = 6 : x — 12

42 : 74 = 6 : x — 12

7 : 74 = 1 : x — 12

mithin $x - 12 = \frac{74}{7} = 10\frac{4}{7}$ Maaß

d. h. die gesuchte Zahl x weniger 12, ist $10\frac{4}{7}$, also die Zahl x selbst offenbar um 12 größer als $10\frac{4}{7}$; daher $x = 22\frac{4}{7}$ Maaß von A:

Eben so findet man von B = $3\frac{3}{7}$ Maaß
und daher von C = 32 Maaß

Probe.

$22\frac{4}{7}$	Maaß	à 16 Gr.	machen	$361\frac{1}{2}$	Gr.
$3\frac{4}{7}$	″	à 9 Gr.	″	$30\frac{6}{7}$	Gr.
22	″	à 4 Gr.	″	88	Gr.
48	Maaß	kosten also		480	Gr.

also kostet ein Maaß $\frac{480}{48} = 10$ Gr. wie verlangt wurde.

Die Algebra zeigt leichtere Wege die zur einfachen und doppelten Regel Falsi gehörigen Aufgaben aufzulösen.

Von der Vermischungsregel.

191.

Die Fragen welche zu dieser Regel gehören, sind folgende:

Man verlangt den mittlern Werth von verschiedenen Arten von Dingen zu finden, deren Anzahl und besondere Werth einer jeden, bekannt sind.

Oder man soll, wenn eine gewisse Masse aus der Vermischung von verschiedenen Dingen besteht, eine andere bestimmte Menge von eben der Masse haben, worin die verschiedenen vermischten Theile eben das Verhältniß besitzen, welches die Theile in jener Masse haben.

Die Auflösung geschiehet nach folgender Regel.

Man multiplicire den Werth einer jeden Art von Dingen, mit der Zahl der Dinge dieser Art; addire alle diese Producte; und dividire die Summe, mit der Anzahl der Dinge aller Art.

Erstes Beyspiel.

Man setzt 200 Arbeiter an, davon 50 wöchentlich ein jeder 40 Gr., 70 wöchentlich ein jeder 30 Gr., 50 wöchentlich ein jeder 25 Gr. und 30 wöchentlich ein jeder 20 Gr. erhält; wie viel wird ein jeder Arbeiter wöchentl. im Durchschnitt erhalten?

50	Arb.	à	40	Gr.	wöchentlich	bekommen zusammen	2000	Gr.
70	″	à	30	″	″	″	2100	Gr.
50	″	à	25	″	″	″	1250	Gr.
30	″	à	20	″	″	″	600	Gr.
						Summa	5950	Gr.

Wöchentlich erhalten die 200 Arb. also zusammen 5950 Gr. und folglich ein jeder Arb. wöchentlich $\frac{5950}{200} = 29\frac{3}{4}$ Gr. = 1 Thl. 5 Gr. 9 Pf.

Zweytes Beyspiel.

Wenn man gutes Schießpulver haben will, so ist bekannt, daß man 1 Pf. Salpeter, 6 Loth Kohlen und 4 Loth Schwefel nehmen muß. Nun soll man 8 Pf. Pulver verfertigen, wie viel wird von jeder Sorte zu nehmen seyn?

Die Rechnung wird so angestellt

32	Loth Salpeter
6	Loth Kohlen
4	Loth Schwefel
Summa 42	Loth in der Vermischung, folglich

$42 : 32 = 8$ Pf. : $\frac{8 \cdot 32}{42} = 6\frac{2}{21}$ Pf. Salpeter

und $42 : 6 = 8$ Pf. : $\frac{6 \cdot 8}{42} = 1\frac{1}{7}$ Pf. Kohlen

endlich $42 : 4 = 8$ Pf. : $\frac{4 \cdot 8}{42} = \frac{16}{21}$ Pf. Schwefel.

Summa 8 Pf. wie es seyn muß.

Aus diesen Beyspielen wird man schon einsehen, daß die Regeln dieser Rechnung von der Regel der Gesellschaftsrechnung gar nicht verschieden sind; weil hier wie bey der Gesellschaftsregel ein gegebenes Ganze in solche Theile zu Theilen ist, deren Verhältniß unter einander einerley mit dem Verhältniß der

Theile der anfänglich angenommenen Maaße, wie das nächst vorhergehende Beyspiel deutlich zeigt.

Wenn der Werth oder Gehalt derjenigen Theile, welche in die Vermischung kommen, bekannt ist, so ist es auch überaus leicht, den Werth oder Gehalt der vermischten Masse zu finden: denn es muß der Werth oder Gehalt der vermischten Masse den Werthen dererjenigen Theile, welche in die Vermischung kommen, zusammengenommen gleich sein.

Drittes Beyspiel.

Ein Weinhändler besitzt dreyerley Sorten Wein, wovon das Maaß des A, 8 Gr., des B 14 Gr. und des C 20 Gr. kostet, nun nimmt er von A 4 Maaß, von B 9 Maaß und von C 6 Maaß, und macht daraus eine Vermischung, wie viel wird der vermischte Wein und wie viel 1 Maaß davon werth sey?

4	Maaß	à 8	Gr. sind werth	32 Gr.
9	:	à 14	: : :	126 Gr.
6	:	à 20	: : :	120 Gr.
19	Maaß in d. Verm. sind werth			278 Gr.

Folglich kostet 1 Maaß $\frac{278}{19} = 14\frac{12}{19}$ Gr.

Viertes Beyspiel.

Ein Goldschmidt macht ein silbernes Gefäß, nimmt hierzu 2 Mark 14löthiges, 1½ Mark 10löthiges und ½ Mark 12löthiges Silber, setzt hierzu noch 1 Mark Kupfer, wie viel löthig wird das Silber seyn?

Die Rechnung giebt

2	Mark	à	14	Loth	fein	hält	28	Loth fein
$1\frac{1}{2}$	″	à	10	″	″	″	15	″ ″
$\frac{1}{2}$	″	à	12	″	″	″	6	″ ″
1	Mark	Kupfer		″	″	″	0	″ ″

5 Mark in d. Misch. fein hält 49 Loth fein.
daher enthält 1 Mark fein $\frac{49}{5} = 9\frac{4}{5}$ Loth fein.

Fünftes Beyspiel.

Jemand schmelzt $2\frac{1}{2}$ Mark 23 karatiges, 1 Mark 20 karat. und $\frac{1}{2}$ M. 18 karat. Gold zusammen, wie viel karatig wird das Gold in der Vermischung seyn?

Antw. 1 Mark enthält $21\frac{7}{8}$ Karat fein.

Es ist sehr bequem, den Grad der Feinheit des Goldes und Silbers durch einen Bruch auszudrücken. Man findet alsdenn leicht, wie viel Mark fein Gold oder fein Silber in einer gegebenen Menge von Gold und Silber enthalten ist, wenn man weiß, wie viel karatig oder wie viel löthig es sey; man braucht nemlich nur einen solchen Bruch mit der gegebenen Menge von Gold oder Silber zu multipliciren, um sogleich die Menge fein Gold oder fein Silber zu erhalten, welche in der gegebenen rohen Menge enthalten ist.

So ist z. B. 14löthiges Silber $\frac{14}{16}$ fein, 21karatiges Gold $\frac{21}{24}$ karat. fein u. s. w. Es ist demnach in einer Menge von 16 Mark 11löthigen Silbers $16 . \frac{11}{16} = 11$ Mark fein Silber, und in einer Menge von 8 Mark 23karatiges Gold $8 . \frac{23}{24} = \frac{23}{3} = 7\frac{2}{3}$ Mark fein Gold u. s. w.

Ist also eine gewisse Masse von Silber oder Gold nach ihrem Gewichte nebst der Anzahl von feinem Golde oder feinem Silber bekannt, so ist es auch leicht vermittelst der Regel Detri zu finden,

wie viel Loth fein 1 Mark Silber, oder wie viel Karat fein eine Mark Gold enthalte, oder welches einerley ist, wie viel löthig das Silber, oder wie viel karatig das Gold sey.

Sechstes Beyspiel.

Eine Masse Gold von 12 Mark hält $10\frac{1}{3}$ Mark fein Gold, wie viel karatig wird es seyn?

Antw. $\frac{10\frac{1}{3}. 24}{12} = 10\frac{1}{3} . 2 = 20\frac{2}{3}$ Karat. fein

Siebentes Beyspiel.

Eine Masse Silber von 24 Mark hält 22 Mark fein Silber, wie viel löthig wird das Silber seyn?

Antw. $\frac{22. 16}{24} = \frac{22. 2}{3} = 14\frac{2}{3}$ Loth fein.

So bald man weiß, wie viel karatig oder wie löthig eine vermischte Masse von Gold oder Silber ist, so ist es alsdann auch leicht, vermittelst der Regel Detri die Theile einer gegebenen Menge von Silber oder Gold zu finden, welche eben das Verhältniß unter sich haben.

Achtes Beyspiel.

Wenn 3 Mark 12löthiges Silber zusammengeschmolzen werden; wie viel löthig wird das Silber seyn?

Man hat

3	Mark	à	12	Loth	fein,	hält	36	Loth fein
4	:	à	14	:	:	:	56	: :
6	:	à	10	:	:	:	60	: :
13	Mark	in	der	Mischung		hält	152	Loth fein

Folglich enthält 1 Mark $\frac{152}{13}$ = 11$\frac{9}{13}$ Loth fein.

Nun ist die Frage, wie viel wird von jeder Sorte zu nehmen seyn, um 24 Mark 11$\frac{9}{13}$ löthiges Silber zu erhalten? Der Ansatz ist dieser

13 Mark : 24 M. = 3 M. 12 Löth. : $\frac{3.\ 24}{13}$ = 5$\frac{7}{13}$ M.
12 löth. Silber.

Ferner

13 ′ : 24 ′ = 3 ′ 14 ′ : $\frac{24.\ 4}{13}$ = 7$\frac{5}{13}$ M.
14 löth. Silber.

endlich

13 ′ : 24 ′ = 6 ′ 10 ′ : $\frac{6.\ 24}{13}$ = 11$\frac{1}{13}$ M.
10 löth. Silber.

Probe.

5$\frac{7}{13}$	Mark	à 12	Loth	fein =	66$\frac{6}{13}$ Loth fein
7$\frac{5}{13}$	′	à 14	′	′ =	103$\frac{5}{13}$ ′ ′
11$\frac{1}{13}$	′	à 10	′	′ =	110$\frac{10}{13}$ ′ ′
24	Mark	in der Misch.		=	280$\frac{8}{13}$ Loth fein.

Folglich ist eine Mark $\frac{280\frac{8}{13}}{24}$ = 11$\frac{9}{13}$ Lth. fein, wie verlangt wird.

Neuntes Beyspiel.

Jemand schmelzt 2 M. 22karatiges, 3 M. 18 kar. und 1 Mark 19 Kar. Gold zusammen, es entsteht die Frage, wie viel karatig das Gold werde?

Der Ansatz ist

2	Mark	à 22	Karat	fein hält	44 Karat fein
3	′	à 18	′	′ ′	54 ′ ′
1	′	à 19	′	′ ′	19 ′ ′
6	Mark	in der Verm.		hält	117 Karat fein.

Also 1 Mark fein hält $\frac{117}{6}$ = 19$\frac{1}{2}$ Karat fein.

Es ist nun ferner die Frage: wie viel wird von jeder Sorte zu nehmen seyn, damit man 15 M. $19\frac{1}{2}$ karatiges Gold erhalte?

Vermöge der Regel Detri findet man

$6 : 2 = 15 : \frac{15 \cdot 2}{6} =$ 5 Mark 22 karat. Gold

Ferner:

$6 : 3 = 15 : \frac{3 \cdot 15}{6} = 7\frac{1}{2}$ M. 18 karat. Gold

endlich

$6 : 1 = 15 : \frac{15}{6} = 2\frac{1}{2}$ M. 19 karat. Gold

Probe.

5	Mark	à	22	Karat	fein	hält	110	Kar. fein
$7\frac{1}{2}$	:	à	18	″	″	″	135	″ ″
$2\frac{1}{2}$	″	à	19	″	″	″	$47\frac{1}{2}$	″ ″
15	Mark	in	der	Misch.	hält		292^{1}	Kar. fein.

Also 1 Mark fein enthält $\frac{292\frac{1}{2}}{15} = 19\frac{1}{2}$ Karat fein wie verlangt wird.

Alles was bisher in der Vermischungsregel vorgetragen worden, findet bey allen andern Dingen statt, Z. B. Zinn wird gewöhnlich mit Bley versetzt, und das schlechteste Zinn ist, wo 1 Pfund fein Zinn und 1 Pf. Bley; das beste aber, wo 9 Pf. fein Zinn und 1 Pf. Bley zusammengeschmolzen sind. In jenem Falle sagt man es sey 2 pfündiges und im diesem Falle es sey 10 pfündiges Zinn. Es hält demnach ein Stück 7 pfündiges Zinn $\frac{6}{7}$ fein, ein Stück 8 pfündiges Zinn $\frac{7}{8}$ fein u. s. w.

So ist in einer Masse von 30 Pf. 8pfündigen Zinn $\frac{7}{8} \cdot 30 = \frac{210}{8} = 26\frac{1}{4}$ Pf. fein Zinn enthalten u. s. w.

Wenn demnach Zinn von verschiedener Feine

zusammen geschmolzen wird, so ist es leicht, nach der Regel Detri zu bestimmen, wie fein die vermischte Masse werden müsse, wenn die Feinheit derjenigen Theile, welche in die Vermischung kommen, bekannt ist.

Zehntes Beyspiel.

10 Pf. 3pfündiges, 12 Pf. 6pfündiges und 14 Pf. 9pfündiges Zinn, zusammengeschmolzen, wie viel pfündig wird das Zinn werden?

10 Pf. 3pfünd. fein 10 . $\frac{2}{3}$ = $\frac{20}{3}$ = $6\frac{2}{3}$ Pf.
12 Pf. 6pfünd. fein 12 . $\frac{5}{6}$ = 2. 5 = 10 Pf.
14 Pf. 9pfünd. fein 14 . $\frac{8}{9}$ = $11\frac{2}{9}$ = $12\frac{4}{9}$ Pf.

also 36 Pf in der Vermischung fein $29\frac{1}{9}$ Pf.
mithin wird dieses Zinn in der Vermischung ohngefähr 5pfündig.

Von der Alligationsregel.

192.

Es lassen sich bey Vermischung von Dingen, welche unter sich von verschiedenem Werth oder Gehalt sind, und eine Vermischung leiden, vorzüglich zwey Fälle gedenken; einmahl verlangt man nur den Werth oder den Gehalt, welchen die vermischte Masse bekommt, das andremahl aber verlangt man einen mittlern bestimmten Werth oder Gehalt der vermischten Masse, oder es soll die Menge einer jeden Art von Dingen, die in einer oder mehreren Mischungen vorkommen aufgefunden werden, vorausgesetzt, man kennt den Preis oder Gehalt einer jeden Art, und auch den ganzen Preis oder Gehalt einer jeden Mischung. Rechnungsaufgaben, welche zur ersten

Art gehören, sind bereits in der Vermischungsregel abgehandelt; die der andern Art, gehören zu der sogenannten Alligationsregel. Viele Schriftsteller halten die Vermischungsregel (Mixtionsregel) für einerley mit der Alligationsregel; beyde sind aber wesentlich von einander verschieden; denn zur Mixtionsregel gehören nur solche Fälle, bey denen das Verhältniß der Theile, welche in die Vermischung kommen sollen, bekannt ist, und zur Alligationsregel gehören solche Fälle, wo man das Verhältniß der Theile, welche in die Vermischung kommen, erst suchen muß.

Z. B. Ein Weinhändler vermischt folgende drey Sorten Wein mit einander, nemlich von der ersten A 6 Maaß à 6 Gr.; von der andern B 9 Maaß à 12 Gr.; und von der dritten Sorte C 12 Maaß à 20 Gr.; nun wird gefragt. wie viel kostet 1 Maaß in der Vermischung? so gehört dies Beyspiel offenbar nicht zur Alligations sondern zur Mixtionsregel: denn die Werthe der vermischten Theile in dem einen Maaße müssen sich eben so zu einander verhalten, wie die Werthe der vermischten Theile in der vermischten ganzen Masse sich verhalten.

Man hat nemlich

6	Maaß	à 6 Gr.	kosten	36 Gr.
9	″	à 12 Gr.	″	108 ″
12	″	à 20 Gr.	″	240 ″
also 27	Maaß	kosten		384 Gr.

folglich kostet 1 Maaß $\frac{384}{27} = 13\frac{23}{27}$ oder beynahe 14 Gr.

Würde hingegen folgendes Beyspiel zur Auflösung vorgelegt: es sind zweyerley Sorten Silber nemlich 15 löthiges und 10löthiges vorhanden, man will 12 löthiges Silber haben, es ist die Frage, wie viel von jeder Sorte zu nehmen ist, damit 12löthiges Silber in der Vermischung entstehe; so gehört dieses Beyspiel zur Alligationsregel.

Alle zur Alligationsregel gehörigen Fälle lassen sich unter folgende allgemeine Frage bringen: Es sind verschiedene vermischbare Dinge vorhanden, als Gold, Silber, Kupfer, Zinn, Wein und dergl. Diese sollen wirklich vermischt werden, man frägt, wie viel von einem jeden Dinge genommen werden muß, damit man eine Vermischung, von einem bestimmten mittleren Werth oder Gehalt erhalte.

Aus dem vorhin gegebenen Beyspiele erhellet, daß, wenn 15 löthiges Silber allein in dem Tigel gethan wird, auf jede Mark 3 Loth fein zu viel genommen würde, weil nur 12 löthiges Silber verlangt wird; im Gegentheil daß auf jede Mark 2 loth fein zu wenig genommen würde, wenn allein 10 löthiges Silber in den Tigel käme. Was nun zu wenig genommen worden, muß durch dasjenige was zuviel genommen worden ersetzt werden, doch so, daß 12 löthiges Silber entstehe. Es folgt hieraus offenbar, daß sich die zunehmende Anzahl Mark des 15 löthigen Silbers, zu der zunehmenden Anzahl des 10 löthigen Silbers verhalten muß wie 2 : 3, d. h. es muß von dem 15 löthigen 2 Mark und von dem 10 löthigen 3 Mark genommen werden, damit in der Vermischung 12 löthiges entstehe.

Probe.

2 Mark 15löth. hält fein 30 Loth
3 ″ 10 ″ ″ . 30 Loth

also 5 Mark 1 d. Verm. hält fein 60 Loth.
mithin 1 Mark hält fein $\frac{60}{5}$ = 12 Loth wie verlangt wird.

Es ergiebt sich hieraus für eine frage wie diese: Es sind zweyerley Dinge gegeben, welche verschiedene Werthe oder Gehalte haben und eine Vermischung leiden, man sucht, wie viel von jedem zunehmen sey, damit sie in der Vermischung einen mittlern bestimmten Werth oder Gehalt erhalten, durch folgende Auflösung:

I, Man schreibe den geringen Werth oder Gehalt unter den bessern Werth oder Gehalt der Dinge, welche mit einander vermischt werden sollen.

II,) Den verlangten mittleren Werth setze man zwischen beide inner zur Linken.

III,) Rechter Hand ziehe man von oben herunter einen Strich.

IV,) Nun Subtrahiere man den verlangten mittlern Werth oder Gehalt von dem bessern, und den geringern Werth oder Gehalt von dem mittlern, und setze die erste Differenz hinter den Strich bey dem geringen und die andre Differenz bey dem bessern Werth; diese beyden Differenzen zeigen alsdann auch wie viel von jedem Dinge zu nehmen sey, damit der verlangte mittlere Werth in der Vermischung entstehe.

Z. B. Ein Goldschmidt besitzet zweyerley Sor-

ten Gold, nemlich, 23karatiges und 18karatiges, er will aber 20karatiges haben, wie viel wird er von jeder Sorte nehmen müssen?

Der Ansatz ist

23 Kar. Gold		2	nemlich 20 — 18
man verlangt 20 Kar.			
18 Kar. Gold		3	nemlich 23 — 20

Er muß also von dem 23karatigen 2 Mark, und von dem 18karatigen 3 Mark nehmen, um in der Vermischung 20karat. zu erhalten.

Probe.

2 Mark 23karat. Gold hält fein 46 Karat.
3 ‘ 20 ‘ ‘ ‘ ‘ 54 ‘

also 5 Mark in der Vermisch. hält fein 100 Karat.
folglich hält eine Mark fein $\frac{100}{5}$ = 20 Karat wie verlangt wird.

Erstes Beyspiel.

Ein Kaufmann hat zweyerley Sorten Coffée, von der einen kostet das Pfund 16 Gr. und von der andern 8 Gr., wie viel wird von jeder Sorte zu nehmen seyn, damit in der Vermischung 1 Pf. 11 Gr. koste?

Der Ansatz ist

	16	3
11		
	9	5

mithin von der bessern Sorte 3 Pf. und von der schlechtern 5 Pf.

Probe.

3 Pf. à 16 Gr. kosten 48 Gr.
5 Pf. à 8 Gr. ‘ 40 Gr.

also 8 Pf. 88 Gr.
folgl. kostet 1 Pf., $\frac{88}{8}$ = 11 Gr. wie verlangt wird.

Zweytes Beyspiel.

Es sind zweyerley Sorten Wein vorräthig, von der erstern Sorte kostet 1 Maaß 20 Gr., von der andern 8 Gr., man will beyde mit einander vermischen, um in der Vermischnng 1 Maaß für 12 Gr. geben zu können, wie viel wird von jeder Sorte zu nehmen seyn?

Der Ansatz ist

	20	4
12		
	8	8

also von der ersten Sorte 4 Maaß und von der andern Sorte 8 Maaß.

Probe.

4 Maaß	à 20 Gr.	kosten 80 Gr.
8 ″	à 8 Gr.	″ 64 Gr.
also 12 Maaß kosten		144 Gr., folglich kostet 1

Maaß, $\frac{144}{12}$ = 12 Gr. wie verlangt wird.

Drittes Beyspiel.

Ein Oekonom hat zweyerley Sorten Waizen, von der erstern kostet 1 Scheffel 5 Thlr. und von der andern 4 Thlr. 6 gr. Es sollen beyde Sorten mit einander vermischt werden um einen Scheffel für 4 Thlr. 12 gr. verkaufen zu können, wieviel muß von jeder Sorte genommen werden?

	5 Thlr.	$\frac{1}{4}$
$4\frac{1}{2}$		
	$4\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$

Also von der erstern Sorte $\frac{1}{4}$ von der andern $\frac{1}{2}$ Scheffel.

Probe.

$\frac{1}{4}$ Scheffel	a	5 Thl.	gilt $1\frac{1}{4}$ Thlr.
$\frac{1}{2}$ —	a	$4\frac{1}{4}$ ″	″ $2\frac{1}{8}$ ″
$\frac{3}{4}$ Scheffel	gelten	also	$3\frac{3}{8}$ Thlr.

Mithin gilt 1 Scheffel ″ ″ ″ ″ $\frac{3\frac{3}{8}}{\frac{3}{4}}$ = $4\frac{1}{2}$ Thlr.

wie verlangt worden.

Viertes Beyspiel.

Ein Goldschmidt besitzt 15löthiges und 9löthiges Silber, er will 11löthiges haben, wieviel muß er von jeder Sorte nehmen?

Antwort 2 Mark 15löth. und 4 Mark 9 löthiges Silber.

Fünftes Beyspiel.

Jemand besitzt zweyerley Sorten Gold, nemlich 22 karat. und 18 karat. Gold, wieviel muß von jeder Sorte genommen werden, um $19\frac{1}{2}$ karat. zu erhalten?

Antwort $1\frac{1}{2}$ Mark 22 karat. und $2\frac{1}{2}$ Mark 18 karatig Gold.

Ist das Verhältniß der Theile, welche in die Vermischung kommen sollen vermöge der Alligations-Regeln gefunden, so läßt sich nach der Vermischungs-Regel bestimmen wie viel von den Theilen genommen werden müssen, um eine bestimmte Menge von eben der Art zu erhalten.

Z. B. Ein Weinhändler mischt zweyerley Sorten Wein zusammen, wovon die eine Sorte das Maaß 16 gr. und die andre das Maaß 6 gr. kostet, er will 14 Maaß in der Vermischung haben, und jedes Maaß soll 12 gr. kosten, es ist die Frage, wie viel wird von jeder Sorte zu nehmen seyn?

Nach der Alligationsregel findet man

	16 gr.	6
12 gr.		
	6 gr.	4
		10

und nach der Vermischungsregel setzt man an

10 : 6 = 24 : $14\frac{2}{5}$ Maaß von der ersten Sorte

und 10 : 4 = 24 : $9\frac{3}{5}$ " " " andern Sorte.

Probe.

Probe.

$14\frac{2}{5}$ Maaß à 16 gr. kosten $230\frac{2}{5}$ gr.
$9\frac{3}{5}$ — à 6 gr. = $57\frac{3}{5}$ gr.

24 M. in d. Vermisch. kosten 288 gr.
mithin kostet ein Maaß $\frac{288}{24} = 12$ gr.
wie verlangt wird.

Soll zu einer gegebenen Menge Silber, dessen Feine bestimmt ist, bloß Kupfer hinzugesetzt werden, aus Silber von einer andern gegebenen Feine zu erhalten, so wird in der Hauptsache eben so wie bey der Alligationsregel verfahren. Weil aber das Kupfer keinen Grad von Silber hat, d. h. nullöthig ist, so setzt man statt dessen eine 0. Alsdann sucht man zu den Differenzen und der gegebenen Menge des Silbers die 4te Proportional Zahl; diese zeigt an wie viel Kupfer zu nehmen. Z. B.

Es will jemand wissen, wie viel Kupfer zu 24 Mark 15löthigen Silber hinzu gesetzt werden müsse, um 12löthiges zu erhalten?

Man setzt an

12 löth.	15 löthig.	12
	0 löth.	3

folglich 12 : 24 = 3 : 6 Mark Kupfer.

Probe.

24 Mark 15 Loth Silber hält fein 360 Loth.
6 — 0 = 0

30 Mark enthält also fein . . . . . 360 Loth
Mithin enthält eine Mark fein $\frac{360}{30} = 12$ löthig.
wie verlangt wird.

Es sind mehr als zweyerley Dinge ge-

geben, welche eine Vermischung leiden und welche vrrschiedene Werthe oder Gehalte unter einander haben, man sucht, wie viel von jeder Sorte zu nehmen ist, um in der Vermischung eine Masse zu erhalten, welche einen verlangten mittlern Werth, oder Gehalt hat.

Auflösung.

1. Man setze die verschiedenen Werthe oder Gehalte derjenigen Dinge, welche in die Vermischung kommen sollen, von den grösten bis zum kleinsten unter einander, und den mittlernverlangten, zwischen selbige zur Linken; ziehe hierauf hinter die Werthe und die Gehalte der Länge herunter einen Strich.

2. Nun suche man wie Seite 237 von zwey Werthen oder Gehalten, die Differenzen, und setze sie eben so hinter die Linien.

3. Alsdenn addire man diejenigen Differenzen, welche bey einerley Sorte von den zu vermischenden Dingen, mehr als einmal stehn, so wird man dadurch die verlangten Theile erlangen.

Z. B. Ein Weinhändler hat dreyerley Sorten Weine, A, B, C; von A. kostet 1 Maaß 22 gr. von B 16 gr. von C 6. gr. Er will diese 3 Sorten so mit einander vermischen, daß in der Vermischung ein Maaß 12 gr. kostet, wie viel wird von jeder Sorte zu nehmen seyn?

Der Ansatz ist

	22 gr.	6	6
	16 ″	6	6
verlangten 12 gr.			
	6 gr.	10,4	14.

Vermischt man nemlich A mit C, so müssen von der ersten Sorte 6 und von der andern Sorte 10 Maaß genommen werden; vermischt man ferner B mit C so müssen von B 6 Maaß und von C 4 Maaß in die Vermischung kommen; daher addire man bey C 10 und 4 zusammen, so erhält man 14, und es müssen von A 6 Maaß, von B 6 Maaß und von C 14 Maaß in die Vermischung kommen, wenn ein Maaß 12 gr. werth seyn soll.

Probe.

6 Maaß	à 22 Gr.	gelten	132 Gr.
6 ″	à 16 Gr.	″	96 Gr.
14 ″	à 6 Gr.	″	84 Gr.
26 Maaß	kosten also . . .		312 Gr.

mithin gilt ein Maaß $\frac{312}{26}$ = 12 Gr., wie verlangt wird.

Die Gründe des Verfahrens, zeigen folgende Schlüsse: Wenn man von A 6 Maaß und von C 10 Maaß, ingleichen von B 6 Maaß und von C 4 Maaß, die ersten beyden Sorten für sich und die andern beyden auch für sich zusammen gemischet hätte, so muß in beyden vermöge des Seite 237 Gesagten in der Vermischung ein Maaß 12 Gr, gelten. Man mag nun aber von einerley Sorte so viel zusammen mischen als man will, so wird auch der Werth oder Gehalt von einem Stücke immer gleich bleiben, folglich werden auch 6 Maaß von A, plus 10 Maaß von C, plus 6 Maaß von B, plus 4 Maaß von C, d. i. 6 Maaß von A, plus 14 Maaß von C, plus 6 Maaß von B in der Vermischung Wein geben: wovon 1 Maaß nicht mehr als 12 Gr. werth ist.

Beyspiel.

Es sind dreyerley Sorten Gold vorräthig, die erste ist 23karat. die andere 18karat. und die dritte 16karatiges Gold, man will aber 20karat.

haben, wie viel wird von jeder Sorte genommen werden müssen?

Der Ansatz ist

	23 karat.	2, 4	6
	18 ″	3	3
verl. 20 karat.	16 ″	3	3

Mithin müssen von der erstern Sorte 6 Mark, von der andern 3 Mark und von der dritten auch 3 Mark genommen werden, um in der Vermischung 20karatig zu erhalten.

Probe.

6 Mark 23karat. hält fein 138 Karat.
3 ″ 18 ″ ″ ″ 54 ″
3 ″ 16 ″ ″ ″ 48 ″

12 Mark halten also fein 240 Karat.

Mithin hält eine Mark $\frac{240}{12}$ = 20 Karat fein, wie verlangt wird.

Beyspiel.

Es sind viererley Sorten Silber vorräthig, die erste ist 15löth., die andere 12löth., die dritte 9löth., die vierte 8löthig, man will aber 11löthig Silber haben, wie viel wird von jeder Sorte zu nehmen seyn?

Man hat

	15löth.	2, 3	5
	12 ″	2, 3	5
verlangt 11löth.			
	9 ″	4, 1	5
	8 ″	4, 1	5

folglich muß von jeder Sorte 5 Mark genommen werden, um in der Vermischung 11löthiges Silber zu erhalten.

Probe.

5 Mark 15löth. hält fein 75 Loth
5 ″ 12 ″ ″ ″ 60 ″
5 ″ 9 ″ ″ ″ 45 ″
5 ″ 8 ″ ″ ″ 40 ″

20 Mark hält also fein 220 Loth

Mithin hält eine Mark fein $\frac{220}{20}$ = 11 Loth, wie verlangt wird.

Ueberhaupt wenn mehr als zweyerley Sorten von verschiedenen Dingen, welche eine Vermischung leiden, zusammen vermischt werden sollen, so lassen sich sehr viel Antworten herausbringen, welche den Verlangten alle ein Genüge leisten. Man braucht nehmlich nur alle Dinge, ausser welchem der geringste Werth oder Gehalt beygelegt ist, mit einander zu vermischen, und zwar von jedem so viel als man will, und von diesem Vermischten, den Werth oder Gehalt von einem Stücke zu suchen. Hierauf bestimmt man alsdenn nach der Allegationsregel, wie viel von derjenigen Sorte, welche den geringsten Werth oder Gehalt hat, und wieviel von jener Vermischung zu nehmen verlangt sey, um den mittlern Werth oder Gehalt zu erhalten.

Z. B. Es ist vorräthig 15löth. 11löth. 8löth. und 6löthiges Silber, man will aber 10löthiges haben, wie viel wird von jeder Sorte zu nehmen seyn?

1 Mark 15löth. hält fein 15 Loth
1 ″ 11 ″ ″ ″ 11 ″
1 ″ 8 ″ ″ ″ 8 ″

3 Mark enthalten also fein 34 Loth
mithin enthält eine Mark fein $\frac{34}{3}$ = $11\frac{1}{3}$ Loth.

$11\frac{1}{3}$löth.	4
verlangt 10löth.	
6 ″	$1\frac{1}{3}$

Daher muß von dem Gemischten 4 Mark und von dem 6löthigen $1\frac{1}{3}$ Mark in die Vermischung kommen um 10löthiges zu erhalten.

Probe.

$1\frac{1}{3}$	Mark	15löth.	hält	fein	20	Loth	fein		
$1\frac{1}{3}$	″	11	″	″	″	$14\frac{2}{3}$	″	″	
$1\frac{1}{3}$	″	8	″	″	″	$10\frac{2}{3}$	″	″	
$1\frac{1}{3}$	″	6	″	″	″	8	″	″	

$5\frac{1}{3}$ Mark enthält also fein $53\frac{1}{3}$ Loth, also enthält eine Mark $\frac{53\frac{1}{3}}{5\frac{1}{3}} =$ 10 Loth fein, wie verlangt wird.

Ist einmahl das Verhältniß der Theile, welche in die Vermischung kommen sollen, nach der Alligationsregel bestimmt worden, so läßt sich nach der Vermischungsregel berechnen, wie viel von jeder Sorte zu nehmen ist, damit eine bestimmte Menge von eben dem Werthe oder Gehalte erhalten werde.

Z. B. Ein Weinhändler hat viererley Sorten Weine, von der ersten kostet 1 Quart 16 Groschen, von der andern 14 Groschen, von der dritten 8 Groschen und von der vierten 4 Groschen. Er will diese mit einander vermischen, und in der Vermischung 50 Quart haben à 10 Groschen. Wie viel wird von jeder Sorte zu nehmen. seyn?

Die Rechnung giebt

16 Gr.	2, 6	8
14 =	2, 6	8
verlangt 10 Gr.		
8 =	6, 4	10
4 =	6, 4	10
Summa	36	

Man muß also von der ersten Sorte 8, von der andern 8, von der dritten 10 und von der vierten auch 10 Quart nehmen, um in der Vermischung Wein zu erhalten, wo jedes Quart 10 Groschen werth ist.

Nun setzt man ferner

$36 : 8 = 50 : \frac{50 \cdot 8}{36} = 11\frac{1}{9}$ Quart von der ersten und zweyten Sorte

Ferner:

$36 : 80 = 50 : 13\frac{8}{9}$ Quart von dritten und vierten Sorte.

Probe.

$11\frac{1}{9}$ Quart	à	16 Gr.	kosten	$177\frac{7}{9}$ Gr.
$11\frac{1}{9}$ =	à	14 =	=	$155\frac{5}{9}$ =
$13\frac{8}{9}$ =	à	8 =	=	$121\frac{1}{9}$ =
$13\frac{8}{9}$ =	à	4 =	=	$45\frac{5}{9}$ =
50 Quart kosten also				500 Gr.

Mithin kostet 1 Quart $\frac{500}{50} = 10$ Gr. wie verlangt wird.

Von der Regel Coeci.

193.

Alle zur Alligationsregel gehörigen Rechnungs-Aufgaben, verlangen das Verhältniß der Theile zu suchen, welche in die Vermischung kommen sollen, um einen bestimmten mittlern Werth oder Gehalt zu erhalten. Sind nun diese Theile einmahl bekannt, so ist es alsdann auch leicht, wie aus dem nächst vorhergehenden Beyspiele erhellet, nach der Vermischungsregel zu bestimmen, wie viel von jedem zu nehmen sey, um eine gegebene Menge von dem Gemischten zu erhalten. In der Regel Coeci werden nun noch andere Regeln gezeigt werden, um eben dieselben Resultate zu erhalten. Um selbige desto deutlicher zu erkennen, sey folgende Frage zur Auflösung vorgelegt worden.

Ein Oekonom hat zweyerley Sorten Korn, von der ersten Sorte kostet 1 Scheffel 4 Thl., von der andern aber 3 Thl., in der Vermischung soll aber 1 Scheffel $3\frac{1}{6}$ Thaler kosten, wie viel wird von jeder Sorte genommtn werden müssen, damit in der Vermischung 24 Scheffel kommen à 3 Thaler?

Nach der Alligationsregel hat man

$$\begin{array}{r|l} 4 & \frac{1}{6} \\ 3\frac{1}{6} & \\ 3 & \frac{5}{6} \end{array}$$

Also muß von der ersten Sorte $\frac{1}{6}$ und von der andern $\frac{5}{6}$

Scheffel genommen werden, um in der Vermischung Korn zu erhalten, wo 1 Scheffel $3\frac{1}{6}$ Thl. werth ist. Nun setzt man ferner an

1 : $\frac{1}{6}$ = 24 : $\frac{1}{6}$ 24 = 4 Scheffel v. d. erst. Sorte
ferner: 1 : $\frac{5}{6}$ = 24 : $\frac{5}{6}$. 24 = 20 " " " andern.

Wenn man diese Aufgabe etwas genauer betrachtet, so werden sich andere Wege finden um eben diese Resultate zu erhalten. Es ist nemlich einleuchtend daß die Anzahl der Scheffel v. d. ersten Sorte, und die Anzahl der Scheffel v. d. andern Sorte zusammen 24 Scheffel ausmachen müssen; daß ferner 3 mahl die Anzahl der Scheffel von der ersten Sorte und 4 mahl die Anzahl der Scheffel v. d. andern Sorte zusammen den Werth von 24 Scheffel à $3\frac{1}{6}$ Thlr. d. h. 24. $3\frac{1}{6}$ Thlr. ausmachen müssen. Hieraus sieht man also, daß es hierbey vorzüglich darauf ankomme; eine gegebene Zahl 24 in zwey noch unbekannte Theile zu theilen, so daß ein jeder Theil mit einem besondern gegebenen Factor (hier 3 u. 4) zu multipliciren ist, damit Producte entstehen, deren Summe gleich einer andern gegebenen Zahl (hier 24. $3\frac{1}{6}$) werde.

dazu dienen folgende Regeln

1) Man multiplicire die kleine gegebene Zahl, welche mit einem Theile multiplicirt werden soll, mit der Zahl, welche in zwey Theile zu theilen ist.

2) Subtrahire man dieses Product von der andern gegebenen Zahl, welche die Summe der Producte der Theile mit dem gegebenen Factor gleich seyn soll.

3) Diesen Rest dividire man mit der Differenz der beyden gegebenen Factoren, welche mit beyden Theilen zu multipliciren sind; der Quotiente ist derjenige Theil, welcher mit dem größten gegebenen Factor zu multipliciren ist.

4) Subtrahiret man endlich diesen Theil von derjenigen Zahl, welche in zwey Theile zu theilen ist, so erhält man zur Differenz den andern Theil.

Der Beweis dieser Regel ist folgender:

Der anschaulichen Kürze wegen bezeichne man die gegebene Zahl mit g, welche in die beyden unbekannten Theile x und y zu theilen ist, so hat man offenbar $x + y = g$

D. h. die beyden zu findenden unbekannten Theile machen zusammen die Gegebene Zahl aus.

Ferner mögen b und a die bekannten Factoren bezeichnen, mit welchen x und y zu multipliciren sind, und es sey die Summe dieser Producte gleich der gegebenen Zahl, welche wir mit G bezeichnen wollen, so muß

b mal $x + a$ mal $y = G$ seyn. Wenn man aber, $x + y = g$ mit b multiplicirt, so hat man

b mal $x + b$ mal $y =$ b mal g.

In diesem letzten Resultate ist das Product b mal x, ein Theil des Ganzen, und dieses Product findet sich auch als ein Theil in dem Werthe von G, zieht man daher b mal g von G ab, so heben sich die Producte b mal x auf und es bleibt bloß

a mal y — b mal y = G — b mal g
oder welches einerley ist (a weniger b) mal y = G weniger b mal g

D. h. G weniger b mal g, ist (a weniger b) mal größer als y; folglich ist y nur der (a weniger b)te Theil von (G weniger b mal g.)

D. h. y ist gleich $\frac{\text{G weniger b mal g}}{\text{a weniger b}}$.

Ueberlegt man was hier G, g, a und b bedeuten, so ist obige Regel nur eine bloße Uebersetzung dieser Zeichen in Worten.

Im Beyspiele des vorhergehenden § bedeutet also

a so viel als 4
und b = = = 3
= G = = = 24. $3\frac{1}{6} = 76$
= g = = = 24.

Demnach findet man

nach d. 1 Regel 3. 24 = 72
= = 2 = 76 — 72 = 4
= = 3 = $\frac{4}{4 - 3} = 4 = y$
= = 4 = 24 — 4 = 20 = x

Beyspiel.

Ein Goldschmidt braucht 6 Mark 12löthiges Silber, nun hat er vorräthig 15löthiges und 9löthiges, wie viel wird er von jeder Sorte nehmen müssen?

Die Rechnung giebt

9 . 6 = 54 und 72 — 54 = 18, ferner

15 — 9 = 6 und $\frac{18}{6}$ = 3, folglich

3 Mark von dem 15löthigen und 6 — 3 = 3 Mark von dem 9löthigen.

Probe.

3 Mark 15löth. Silb. hält fein 45 Loth
3 : 9 : : : : 27 :

6 Mark halten also fein 72 Loth, folglich hält eine Mark $\frac{72}{6}$ = 12 Loth fein, wie verlangt wird.

Beyspiel.

Ein Weinhändler will 40 Quart vermischten Wein à 8 Gr. haben, vermischt daher zweyerley Sorten, nemlich von der ersten à 1 Quart 16 Gr., und von der andern à 1 Quart 4 Gr., wie viel wird von jeder Sorte zu nehmen seyn?

Die Rechnung giebt

4. 40 = 160 und 320 — 160 = 160

Ferner 16 — 4 = 12, folglich

$\frac{160}{12}$ = $13\frac{1}{3}$ Quart v. d. bessern Weine

und daher 40 — $13\frac{1}{3}$ = $26\frac{2}{3}$ Quart von der schlechtern Sorte.

Probe.

$13\frac{1}{3}$ Quart a 16 Gr. kosten $213\frac{1}{3}$ Gr.
$26\frac{2}{3}$: a 4 Gr. : $106\frac{2}{3}$ Gr.

40 Quart kosten also 320 Gr., daher kostet 1 Quart $\frac{320}{40}$ = 8 Gr., wie verlangt wird.

Soll eine gegebene Zahl in mehr als zwey Theile getheilet werden, so daß, wenn ein jeder Theil mit einem besondern gegebenen Factor multiplicirt wird, alsdenn Producte entstehen, deren

Summe einer andern gegebenen Zahl gleich wäre, so können hier viele Auflösungen statt finden, welche alle dem Verlangten ein Genüge leisten.

Gesetzt es soll eine gegebene Zahl die wir mit g bezeichnen wollen in drey jetzt unbekannte mit x, y und z bezeichneten Theile getheilt werden, und die gegebenen drey Factoren, welche mit den unbekannten Theilen x, y und z zu multipliciren sind, seyen nach ihrer Größe mit a, b und c bezeichnet: ferner sey die Summe der Producte a mahl x, b mahl y und c mahl z einer gegebenen Zahl die wir mit G bezeichnen gleich, so hat man

1) $x + y + z = g$

D. h. die Summe der zu findenden Theile x, y, und z sind zusammen gleich der zu theilende Zahl g.

und 2) a mal x + b mal y + c mal z = G

Multiplicirt man No 1 mit a, so erhält man

3) a mal x + a mal y + a mal z = a mal g

Zieht man nun No 3 von No 2 ab, so heben sich die Producte a mal x auf, und es bleibt 6 mal y — a mal y + c mal z — a mal z = G — a mal g

oder (b weniger a) mal y + (c weniger a) mal z = G weniger a mal g

Zieht man hier auf beyden Seiten des Gleichheitszeichens (C weniger a) mal z ab, so kömmt

(b weniger a) mal y = G weniger a mal g — (c weniger a) mal z

Was rechter Hand des Gleichheitszeichens stehet, ist also (b weniger a) mal größer als y; folglich ist

$$y = \frac{G \text{ weniger } a \text{ mal } g - (c \text{ weniger } a) \text{ mal } z}{b \text{ weniger } a}$$

Die durch a, b, c, g und G bezeichneten Größen, sind gegeben, aber z nicht, soll also y bestimmt werden, so muß man in den für y gefundenen Werth z willkürlich bestimmen, und sollte bey dieser willkührlichen Annahme, der Abzug von G nicht geschehen können, so ist dieses ein Zeichen das z zu groß angenommen ist.

Z. B. Ein Goldschmidt verlangt 8 Mark 20karat. Gold, er hat 23karat., 19karat. und 16karatiges vorräthig, wie viel wird nun von jeder Sorte zu nehmen seyn?

Hier ist also $a = 16$; $b = 19$ und $c = 23$,

$g = 8$ und $G = 8.20 = 160$.

Man nehme nun $z = 3$ Mark, so wird

$$y = \frac{160 - 16.8 - (28 - 16) \text{ mal } 3}{19 - 16}$$

$$= \frac{160 - 149}{3} = \frac{11}{3} = 3\frac{2}{3} \text{ Mark.}$$

folgl. $x = 8 - (3 + 3\frac{2}{3}) = 8 - 6\frac{2}{3} = 1\frac{1}{3}$ Mark.

Probe

3	Mark	23	Karat.	Gold hält fein		69	Karat.
$3\frac{2}{3}$	″	19	″	″	″	$69\frac{2}{3}$	″
$1\frac{1}{3}$	″	16	″	″	″	$21\frac{1}{3}$	″
8	Mark	halten	also fein			160	Karat,

Also enthält 1 Mark $\frac{160}{8} = 20$ Karat fein, wie verlangt wird.

Nimmt man für z eine andre Zahl an, so werden auch y und x andere Werthe erhalten, und es wird gleichwohl dem Verlangten ein Genüge geschehen seyn.

Ist für z eine ganze Zahl angenommen worden,

so erhellet auch aus diesem Beyspiele, daß es nicht nothwendig ist, daß die übrigen Theile auch ganze Zahlen werden. Gesetzt aber nun, man verlangte die übrigen Theile auch in ganzen Zahlen, so werden auch bey dieser Einschränkung nach verschiedene Auflösungen statt haben können, welche überhaupt alle der Frage ein Genüge thun, wobey aber doch nicht genau zu bestimmen ist, ob eine solche Antwort auch dem Fragenden genug thue, wofern nicht etwa gleichsam blindlings die verlangten Theile gefunden werden. Aus diesem Grunde hat auch diejenige Regel, nach welcher eine gegebene Zahl in Theile alle aber in ganzen Zahlen getheilt werden soll, so daß, wenn ein jeder Theil mit einem besonderen gegebenen Factor multipliciret wird, die Summe dieser Producte einer andern gegebenen Zahl gleich werde, den Nahmen der Regel Coeci oder der blinden Rechnung erhalten. In dem Umstande, daß die Theile in ganzen Zahlen verlangt werden, unterscheidet sich vorzüglich die Regel Coeci von der Alligations und Mixtionsregel.

200.

Es ist eine Zahl gegeben, man soll sie in Theile, aber alle in ganze Zahlen theilen, so daß, wenn ein jeder Theil mit einem besondern gegebenen Factor multipliciert wird, die Summe aller dieser Producte einer andern gegebenen Zahl gleich werde.

Auflösung

Aus dem in vorigen § allgemein ausgeführten lassen sich leicht folgende Regeln herleiten.

1) Man schreibe die gegebenen Factoren vom größten bis zum kleinsten untereinander, zur linken aber diejenige Zahl, welche in die verlangten Theile in ganzen Zahlen getheilet werden soll, und zur Rechten in eben der Linie diejenige Zahl, welche so groß ist als die Summe der Producte der verlangten Theile in die gegebenen besondern Factoren.

2) Man ziehe hinter die gegebenen Factoren der Länge herunter einen Strich, und subtrahire den kleinsten Factor von den übrigen Factoren, und setze die Differenz allemal bey dem größten Factor.

3) Man multiplicire den kleinsten gegebenen Factor mit der gegebenen Zahl, welche in verschiedene Theile getheilt werden soll, und subtrahire dieses Product von der andern gegebenen und zur Rechten stehenden Zahl.

4) Diesen Rest suche man so einzutheilen, daß die Theile Multiplicatoren von den Differenzen werden, welche hinter dem Striche neben dem gegebenen Factoren stehen, nur müssen die Multiplicatoren zusammen genommen weniger betragen, als die gegebene Zahl, welche in verschiedene Theile getheilt werden soll. Diese Multiplicatoren geben die Theile, welche mit den größten gegebenen Fartoren zu multipliciren sind.

5) Subtrahirt man die Summe dieser Multiplicatoren von derjenigen Zahl, welche in verschiedene Theile getheilt werden soll, so giebt der Rest denjenigen Theil, welcher mit dem kleinsten gegebenen Factor multiplicirt wird. Z. B.

Es soll die Zahl 90 in drey Theile getheilet werden, so daß, wenn der erste mit 15, der andere mit 13 und der dritte mit 9 multipliciret wird, die Summe der Producte so groß werde, als 1240

Die Rechnung giebt

	15	6	
90	13	4	1240
	9		810 = 9 . 90

430

430 = 6. 37 + 4. 52
= 6. 39 + 4. 49
= 6. 41 + 4. 46
= 6. 43 + 4. 43
= 6. 45 + 4. 40
= 6. 47 + 4. 37
= 6. 49 + 4. 34
= 6. 51 + 4. 31
= 6. 53 + 4. 28
= 6. 55 + 4. 25
= 6. 57 + 4. 22
= 6. 59 + 4. 19
= 6. 61 + 4. 16
= 6. 63 + 4. 13
= 6. 65 + 4. 10
= 6. 67 + 4. 7
= 6. 69 + 4. 4

Z. B. Es sollen Ochsen das Stück zu 15 Thlr. Kühe das Stück zu 13 Thl., u. Schweine das Stück

zu 9 Thl. eingekauft werden, man verlangt zu wissen, wenn 90 Stück 1240 Thl. kosten, wie viel von jeder Art gekaufet werden könne?

Man sieht hieraus, daß 17 Auflösungen statt haben können, welche dem Verlangen alle ein Genüge thun. Nimmt man die erste Auflösung, so sieht man leicht daß 37 Stück Ochsen, 52 Stück Kühe und 1 Schwein eingekauft werden müsse.

Denn

37 Stck. Ochsen	à 15 Thl.	kosten	555 Thl.
52 . Kühe	à 13 .	.	676 =
1 Schwein kostet	.	.	9 =
also 90 Stück kosten			1240 Thl.

Nimmt man die zweyte Auflösung, so muß man kaufen

39 Stück Ochsen	à 15 Thl.	kosten	585 Thl.
49 . Kühe	à 13 .	.	637 =
2 . Schweine	à 9 .	.	18 =
90 Stück kosten also			1240 Thl.

Nimmt man die dritte Auflösung, so muß man kaufen

41 Stück Ochsen	à 15 Thl.	kosten	615 Thl.
46 . Kühe	à 13 .	.	598 =
3 . Schweine	à 9 .	.	27 =
90 Stück kosten also			1240 Thl.

Beyspiel.

Männer, Weiber und Jungfern der Anzahl nach 24, verzehren in einem Wirthshause 12 Thl., eine jede Mannsperson muß 16 Gr., eine jede Frau 12 Gr. und eine jede Jungfer 8 Gr. bezahlen, wie viel Männer, wie viel Weiber und wie viel Jungfern sind es gewesen?

Die Rechnung giebt

16	8			
12	4	288 Gr.		
24 8		192 .	=	8 . 24
96				

96 = 8. 1 + 4. 22 = oder
= 8. 2 + 4. 20 =
= 8. 3 + 4. 18 =
= 8. 4 + 4. 16 =
= 8. 5 + 4. 14 =
= 8. 6 + 4. 12 =
= 8. 7 + 4. 10
= 8. 8 + 4. 8
= 8. 9 + 4. 6
= 8. 10 + 4. 4
= 8. 11 + 4. 2

Mithin finden hier 11 Auflösungen statt: Nimmt man die erste, so sind gewesen

1 Mann	à 16 Gr.	=	16 Gr.
22 Weiber	à 12 .	=	264 .
1 Jungfer	à 8 .	=	8 .
24 Personen verzehren also			288 Gr. = 12 Thl.

Nimmt man die zweyte, so sind gewesen

2 Männer	à 16 Gr.	=	32 Gr.
20 Weiber	à 12 .	=	240 .
2 Jungfern	à 8 .	=	16 .
24 Pers. verzehr. also			288 Gr. u. s. w.

Beyspiel.

Es kauft jemand für 100 Thl. Waare, und zwar bezahlt er das Pfund von A mit 2 Thl., das Pfund von B mit 4 Thl., und das Pfund von C mit 5 Thl., erhält überhaupt zusammen 30 Pfund, und zwar von jeder Sorte lauter ganze Pfunde. Wie viel wird er von jeder Sorte bekommen können?

	5	3		
	4	2		100
30	2		30. 2 =	60
				40

$$40 = 3.\ 2 + 2.\ 17$$
$$= 3.\ 4 + 2.\ 14$$
$$= 3.\ 6 + 2.\ 11$$
$$= 3.\ 8 + 2.\ 8$$
$$= 3.\ 10 + 2.\ 5$$
$$= 3.\ 12 + 2.\ 2$$

Es können hier also 6 Auflösungen statt finden: nimmt man die erste, so betragen

2 Pf.	à 5 Thl.	: :	10 Thl.
17 :	à 4	: :	68 :
11 :	à 2	: :	22 :
30 Pf. kosten also . . .			100 Thlr.

Nimmt man die zweyte Auflösung, so betragen

4 Pf.	à 5 Thl.	: :	20 Thl.
14 :	à 4	: :	50 :
12 :	à 2	: :	24 :
30 Pf. kosten also			100 Thl. u. s. w.

Beyspiel.

460 in Gefangenschaft gerathene Soldaten, nemlich Husaren, Cürassier und Musquetier; sollen mit 3640 Thl. ranzionirt werden, so daß für jeden Husaren 12 Thl., für jeden Cürassier 8 Thl. und für jeden Musquetier 6 Thl. bezahlet wird, wie viel wird von jeden besonders gewesen seyn?

Man hat

12	6
8	2
460	6

$6.\ 460 = 2760$

3640
2760
880

$$880 = 6.\ 24 + 2.\ 368$$
$$= 6.\ 25 + 2.\ 365$$
$$= 6.\ 26 + 2.\ 362 \text{ u. s. w.}$$

und so können hier eine Menge von Auflösungen statt finden: Nimmt man die erste, so kosten

24	Husaren	à	12	Thl.	;	288	Thl.
368	Cüraſſier	à	8	;	;	2944	;
68	Musq.	à	6	;	;	408	;
460	Mann koſten alſo				;	3640	Thl.

Nimmt man die zweyte Auflöſung, ſo koſten

25	Huſar.	à	12	Thl.	;	300	Thl.
365	Cüraſ.	à	8	;	;	2920	;
70	Musq.	à	6	;	;	420	;
460	Mann koſten alſo				;	3640	Thl. u. ſ. w.

201.

Die Unbequemlichkeit, welche bey der ſogenannten Blindrechnung ſtatt findet, beſteht darinn, daß man erſt durch Verſuche die Theile, welche noch dazu in ganzen Zahlen verlangt werden, erforſchen muß. Die Algebra lehrt die Grenzen finden, welche die Factoren nicht überſchreiten können, wodurch viel überflüßiges Suchen erſpart wird.

Wird übrigens nicht vorausgeſetzt, daß man die Theile in ganzen Zahlen haben wollte, ſo können dergleichen Fälle auch durch die Regel Coeci aufgelößt werden, wie bereits oben ein paar Beyſpiele angeführt ſind, gemeinlich kann man aber die verlangten Theile vermittelſt der Alligationsrechnung und der Mixtionsregel weit geſchwinder finden.

Von der arithmetiſchen Progreſſion.

202.

Die arithmetiſche Progreſſion iſt eine Folge von Gliedern, wovon ein jedes das ihm Vorhergehende,

um einerley Größe übertrift, oder davon übertroffen wird.

Z. B. diese Reihe

÷ 1, 4, 7, 10, 13, 16, 19, 22, 25, ...

ist eine arithmetische Progression; weil ein jedes Glied hiervon das vorhergehende um einerley Größe, welche hier 3 ist, übertrift.

Die zwey durch einen Strich getrennten Puncte, die man hier zu Anfange der Progression siehet, sind dazu bestimmt zu erinnern, daß, wenn man diese Progression lesen will, man jedes Glied, mit Ausnahme des ersten und letzten Gliedes, wiederholen muß. Man lieſt nehmlich: 1 verhält sich arithmetisch zu 4 wie 4 zu 7; wie 7 zu 10 u. s. w.

Man sagt die Progression sey wachsend (steigend) oder abnehmend (fallend), jenachdem die Glieder zunehmend oder abnehmend fortgehen: da aber beyder Eigenschaften dieselben sind, indem man nur die Wörter plus in weniger, oder hinzusetzen in hinwegnehmen verändert, so werden wir sie hier einzig als wachsend betrachten.

Z. B. ÷ 1, 2, 3, 4, 5, 6 . . .
÷ 1, 3, 5, 7, 9, 11 . . .
÷ 2, 4, 6, 8, 10, 12 . . .
÷ 3, 6, 9, 12, 15, 18 . . .

sind zunehmende Progressionen.

Ließt man jene Reihen rückwärts so hat man

÷ . . . 6, 5, 4, 3, 2, 1
÷ . . . 11, 9, 7, 5, 3, 1 u. s. w.

welches abnehmende Reihen sind.

203.

Aus der Erklärung der Arithmetischen Progression folgt, daß man mit dem ersten Gliede und der gemeinschaftlichen Differenz, oder den Nahmen der Progression, alle andern Glieder machen kann, indem man diesen Nahmen aufeinander folgend hinzusetzt. Und folglich bestehet:

Das zweyte Glied aus dem ersten plus der Differenz.

Das dritte Glied bestehet aus dem zweyten, plus der Differenz; und folglich aus dem ersten plus zwey mal die Differenz.

Das vierte Glied bestehet aus dem dritten, plus der Differenz; und folglich aus dem zweyten plus zweymal die Differenz, d. h. aus dem ersten plus dreymal die Differenz, u. s. w.

204.

Dergestalt kann man ganz allgemein sagen, daß ein beliebiges Glied einer arithmetischen Reihe aus dem ersten Gliede, plus sovielmal die Differenz als Glieder vor diesem Gliede vorhergehen, besteht.

So ist offenbar in der Progression ÷ 1. 3. 5. 7. 9. 11 . .

Das zweyte Glied $3 = 1 + 1.2$;

Das dritte $5 = 3 + 1.2 = 1 + 1.2 + 1.2 = 1 + 2.2$;

Das vierte $7 = 5 + 1.2 = 1 + 2.2 + 1.2 = 1 + 3.2$

u. s. w.

205.

Wenn also daß erste Glied Null wäre, so

würde jedes andre Glied der Progression gleich seyn, so viel mal die Differenz, als Glieder vor diesem Gliede vorhergehen.

206.

Dieses Princip erlaubt folgende zwey Anwendungen.

1°) Es dient ein beliebiges Glied einer Progression zu finden, ohne daß man genöthiget ist, die ihm vorhergehenden zu berechnen:

Man verlangt z. B. zu wissen, welches das hunderste Glied in dieser Progression ist. . . .

$\div$ 4, 9, 14, 19, 24 . . . . .

Da das gesuchte Glied, das hunderste seyn soll, so müssen also 99 Glieder vor ihm vorhergehen; es besteht daher aus dem ersten Gliede 4 und aus 99 mal die Differenz 5; es ist also 4 plus 495, d. h. 499.

Würde ferner die Frage gegeben: Wie viel Geld muß man einem Sappeur für den sechsten von ihm gesetzten Schanzkorb bezahlen, wenn er in einer Belagerung für den ersten einen Gulden, und für jeden folgenden drey Gulden mehr erhält? so würde man, weil er 6 Schanzkörbe gesetzt hat, antworten: er muß $3.(6-1)+1 = 3.5+1 = 6$ Gulden erhalten.

2° Dasselbe Princip dient ferner irgend zwey Zahlen, durch eine Folge von so viel andern Zahlen als man will, zu verbinden, dergestalt, daß das ganze eine arithmetische Progression ausmacht. Dieses nennt man zwischen zwey gegebenen Zahlen, mehrere mittlere arithmetische Proportionalzahlen oder bloß mehrere mittlere arithmetische einschalten oder interpoliren.

Z. B. Man kann 1 und 7 durch fünf Zahlen die mit 1 und 7 eine arithm. Progr. ausmachen, verbinden; diese Zahlen sind 2, 3, 4, 5, 6; da es aber nicht immer leicht auf den ersten Blick zu sehen ist, welches diese Zahlen seyn müssen, so folgt hier, wie man sie mit Hülfe des eben begründeten Princips finden kann.

Es kommt nur darauf an die Differenz zu finden welche in dieser Progression herrscht.

Da nun die größte der beyden vorgegebenen Zahlen, das letzte Glied der Progression seyn soll, so muß es aus dem ersten Gliede, d. h. aus der kleinsten der beyden gegebenen Zahlen, plus so viel mal die Differenz als Glieder vor ihm vorhergehen bestehen. Wenn man also von der größten der beyden Zahlen, die kleinste abzieht, so wird der Rest aus so viel mal die Differenz als Glieder vor dem größten Gliede vorhergehen bestehen; d. h. daß der Product aus der Multiplication dieser Differenz mit der Anzahl der Glieder, die dem größten Gliede vorhergehen ist, wenn man (§ 67) also diesen Rest, durch die Zahl der Glieder die dem größten Gliede vorhergehen müssen, dividirt, so wird man diese Differenz haben.

Aber die Zahl der Glieder welche dem größten Gliede vorhergehen müssen, ist um eine Einheit größer als die Anzahl der mittlern die man zwischen diesen beyden einschalten will; daher, um zwischen zwey gegebenen Zahlen, so viel mittlere arithmetische als man will einzuschalten, so muß man die kleinsten dieser beyden Zahlen, von der größten abziehen, und den Rest durch die um eine Einheit

vermehrte Anzahl der mittlern dividiren. Der Quotient wird die Differenz oder der Nahme seyn, welcher in der Progression herrschen muß.

Z. B. Wenn verlangt wird zwischen 4 und 11, 8 mittlere arithmetische einzuschalten; so zieht man 4 von 11 ab, es bleibt 7, die ich durch 9 als die um eins vermehrte Anzahl der mittlern dividire, der Quotient $\frac{7}{9}$ ist die Differenz die in der Progression herrschen soll, welche folglich seyn wird . . . .

$\dot{-}$ 4, $4\frac{7}{9}$, $5\frac{5}{9}$, $6\frac{3}{9}$, $7\frac{1}{9}$, $7\frac{8}{9}$, $8\frac{6}{9}$, $9\frac{4}{9}$, $10\frac{2}{9}$, 11

Ebenfalls, wenn man neun mittlere arithmetische zwischen 0 und 1 haben wollte, so subtrahirt man 0 von 1, es bleibt also 1, welche man mit 10 als die um 1 vermehrte Anzahl, der mittlern dividiren muß; dieses giebt $\frac{1}{10}$, oder 0, 1 zur Differenz.

Und folglich wird die Progression seyn

$\dot{-}$ 0; 0, 1; 0, 2; 0, 3; 0, 4; 0, 5; 0, 6; 0, 7; 0, 8; 0, 9; 1.

Würde die Aufgabe gegeben: Es hätte jemand 5 Arbeiter an eine Arbeit gestellet, und als er nach deren Beendigung wahrnahm, daß der erste nur eine Schachtruthe, der letzte aber 3 Schachtruthen, und jeder ins besondere um gleich vielmehr als sein Nebenmann ausgegraben hatte; so beschloß er den ersten 3 Gr. und dem letzten 6 Gr., jedem andern aber verhältnißmäßig nach seiner Arbeit zu bezahlen; man fragt: Wie viel hat jeder Arbeiter mehr gearbeitet, und auch mehr an Lohn empfangen? so haben wir in denselben zweyerley Progressionen, nemlich die eine in Ansehung der Arbeit, und die andere in Betreff der Bezahlung, von deren jeder die Differenz bestimmet werden muß. Wir setzen demnach in Ansehung der Arbeit, weil 1 das erste Glied, 3 das letzte, 5 die Anzahl der Glieder sind; so muß die Differenz $\frac{3-1}{5-1} = \frac{1}{2}$ seyn; also hat jeder $\frac{1}{2}$ Schachtruthe mehr als sein Nebenmann gearbeitet, und die Progression ist $\dot{-}$ 1, $1\frac{1}{2}$, 2, $2\frac{1}{2}$, 3.

Hingegen in Betreff der Bezahlung ist 3 das erste

Glied, 6 das letzte, und wiederum 5 die Anzahl der Glieder, also ist die Differenz $\frac{6 - 3}{5 - 1} = \frac{3}{4}$, und mithin hat jeder $\frac{3}{4}$ Gr. oder 9 Pf. mehr erhalten, und die Progression muß $\div$ 3, $3\frac{2}{4}$, $4\frac{1}{2}$, $5\frac{1}{4}$, 6 seyn.

207.

Man sieht hieraus, daß zwischen zwey Zahlen so nahe wie sie auch einander immer seyn mögen, man immer so viel mittlere arithmetische als man will einschalten kann.

208.

Vergleichen wir die Glieder einer Progression mit ihrem letzten Gliede; so finden wir, daß ein jedes Glied aus dem Unterschiede zwischen dem letzten Gliede und dem Producte von der Differenz und der Zahl, welche die Menge seiner nachfolgenden Glieder anzeiget, bestehet.

So ergiebt sich aus der Progression $\div$ 1, 5, 9, 13, 17, 21, 25, daß $21 = 25 - 1.4$; $17 = 21 - 1.4 = 25 - 1.4 - 1.4 = 25 - 2.4$; $13 = 17 - 1.4 = 25 - 2.4 - 1.4 = 25 - 3.4$ u. s. w. Man sieht nemlich hieraus, daß das letzte Glied die Differenz einmal mehr als ihr vorletztes, zweymal mehr als das dritte von ihm, dreymal mehr als das vierte von ihm u. s. w. enthalten muß. Daher muß der Unterschied zwischen irgend einem Gliede einer arithmetischen Progression und ein vielfaches der Differenz immer ein Glied der gedachten Progression geben. Eben so auch giebt die Summe von irgend ein Glied einer solchen Progression und ein Vielfaches von der Differenz immer auch ein Glied der gedachten Progression.

Soll man also das erste Glied einer

Progression finden, deren letztes Glied, die Differenz und die Anzahl der Glieder bekannt sind; so muß man die Differenz mit der Zahl multipliciren, welche die Menge Glieder weniger eins anzeigt, und dieses Product vom letzten Gliede abziehen.

Wäre demnach bekannt, daß von einer Progression das letzte Glied = 56, die Differenz 4. und die Anzahl der Glieder 9 wäre; so muß ihr erstes Glied

= 56 — (9 — 1) 4 = 56 — 8 . 4 = 24 seyn.

Wirklich ist auch die Progression

÷ 24, 28, 32, 36, 40, 44, 48, 52, 56.

Wäre bekannt, daß ein Mineur einen Minengang 12 Fuß weit getrieben, und den letzten mit 2 Thl., aber jeden vorhergehenden mit 4 Gr. weniger bezahlt bekommen hätte; und man verlangte zu wissen: wie hoch der erste bezahlt worden? so stellt hier 12 die Anzahl der Glieder der Progression; 2 Thlr. = 48 Gr. oder 48 das letzte Glied, und 4 die Differenz vor, und mithin kostet der erste 48 Gr. — (12 — 1). 4 Gr. = 48 Gr. — 44 Gr. = 4 Gr.

209.

Aus dem ersten und letzten Gliede, und die Differenz, kann man auch die Anzahl der Glieder einer Progression finden, wenn man den Unterschied ihres letzten und ersten Gliedes durch die Differenz der Glieder dividirt, und zum Quotienten noch 1 addirt.

Wäre also von einer Progression das erste Glied 5, das letzte 17, und die Differenz 2; so muß die Anzahl ihrer Glieder $\frac{17 - 5}{2} + 1 = \frac{12}{2} + 1 = 6 + 1 = 7$ seyn, und wirklich ist die Progression ∴ 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17.

Ferner, wüßte man, daß in einer Belagerung am ersten Tage 300 Schuß, am letzten 3000, und zwar an jedem Tage 100 mehr als am vorhergehenden gegen die Festung wären gethan worden, und man verlangte zu wissen: wie lange sie gedauert hätte? so setzen wir

$$\frac{3000 - 300}{100} + 1 = \frac{2700}{100} + 1 = 27 + 1 = 28$$

folglich hat sie 28 Tage gedauert.

Der Beweis dieser Vorschrift ist folgender:

Da das letzte Glied gleich dem ersten Gliede, plus so viel mal die Differenz als Glieder vor dem letzten Gliede vorhergehen (§ 204), so ist der Unterschied des letzten und ersten Gliedes offenbar gleich dem Producte aus der Differenz und der Zahl der Glieder weniger Eins, dividirt man demnach jenen Unterschied mit der Differenz, so ist der Quotient die Zahl der Glieder weniger Eins, folglich giebt, wenn dieser Quotient um Eins vermehrt wird, die Zahl der Glieder.

Diese Schlüsse werden durch folgendes bestimmte Beyspiel erläutert, wo die Operation zur Linken nicht vollzogen sondern nur angezeigt wird.

Es sey z. B. die Progression

∴ 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27

so ist 27 = (7 − 1). 4 + 3

3 = 3 subtrahirt

27 − 3 = (7 − 1). 4

also $\frac{27 - 3}{4} = \frac{(7 - 1) \cdot 4}{4}$

oder $\frac{27 - 3}{4} = 7 - 1$

folgl. $\frac{27 - 3}{4} + 1 = 7$

Sollte es sich treffen, daß nach den Bedingungen der Aufgabe die Differenz in dem Unterschiede des letzten und ersten Gliedes, dividirt, zum Quotienten keine ganze Zahl bestimmte: so ist die Aufgabe unvollkommen. Der entstehende Bruch aber bezieht sich allemal auf die Differenz, weil hier der Quotient anzeiget, wie oft der Divisor im Dividendus enthalten ist; daher hat man den sovielten Theil der Differenz dem Gliede, welches die ganze Zahl des Quotienten anzeigt, zuzusetzen, um das in der Aufgabe gegebene letzte Glied zu bestimmen.

Gesetzt, man verlangte die Anzahl Glieder einer Progression zu wissen, deren erstes Glied 2, das letzte 15, und die Differenz 3 wäre; so erhielten wir

$\frac{15 - 2}{3} + 1 = \frac{13}{3} + 1 = 4\frac{1}{3} + 1 = 5\frac{1}{3}$.

Demnach enthält die Progression 5 Glieder, wo zum letzten noch $\frac{1}{3}$ von der Differenz 3, d. h. 1 hinzugesetzt, das angegebene Glied 15 erhalten würde; also wäre die Progression

2, 5, 8, 11, 14.

Das Gesetz einer arithmetischen Reihe ist nemlich völlig bestimmt, sobald das erste Glied und die Differenz gegeben ist, und dem richtigen Begriffe von Anzahl der Glieder einer Progression gemäß, kann diese Anzahl nie etwas anders als eine ganze unbenannte Zahl seyn. Wer also erstes Glied, Differenz hat,

und dazu willkürlich ein letztes Glied wählt, der kann leicht eine Zahl als letztes Glied gewählt haben, die nicht in das durch die beyde andernn Zahlen bestimmte Gesetzt liegt.

Man schreibe die Progr. $\div$ 3, 7, 11, 15, 19, 23, 27
dieselbe verkehrt $\div$ 27, 23, 19, 15, 11, 7, 3
addirt

giebt $(3 + 27).\ 7 = 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30$

folglich $\frac{(3 + 27).\ 7}{2} = \frac{1}{2}(30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30 + 30)$

$= \div\ 3 + 7 + 11 + 15 + 19 + 23 + 27$

D. h. Man findet die Summe einer arithmetischen Progression, wenn man das erste und letzte Glied addiret, diese Summe mit der Anzahl der Glieder multiplicirt, und von diesem Producte die Hälfte nimmt.

Dieses muß allgemein wahr seyn, denn in jeder arithmetischen Progression müssen die von den Enden gleich weit abstehenden Glieder immer einerley Summe geben, nemlich immer gleich der Summe des ersten und letzten Gliede; weil bey einer wachsenden arithmetischen Reihe jedes Glied vom ersten Gliede angerechnet aus dem ersten Gliede, plus so viel mal die Differenz als Glieder dem gedachten Gliede vorhergehen, bestehet; das eben so vielte Glied vom Ende angerechnet, bestehet aus dem letzten Gliede, weniget so vielmal die Differenz als Glieder auf den gedachten Gliede bis zum letzten Gliede folgen. Von vorne an nehmen also die Glieder in ihrer

Folge um eben solche Vielfache zu als sie von hinten gezählt abnehmen, daher die Summe solcher gleich weit von beyden Enden abstehenden Glieder, immer gleich der Summe des ersten und letzten Gliedes sind. Schreibt man daher unter eine arithmetischen Reihe, dieselben verkehrt darunter und addirt die correspondirenden Glieder, so müssen so viel gleiche Summen als das erste und letzte Glied geben, entstehen, als Glieder, in der vorgegebenen Reihe waren, deren Summe man also erhält, wenn man die Summe des ersten und letzten Gliedes mit der Zahl der Glieder multiplicirt. In diesem Producte ist die Summe der Glieder der vorgegebenen Progression offenbar zweymal enthalten, folglich muß man dieses Product halbiren, um die Summe der Glieder zu bekommen.

Auf einer Winterpostirung sollen an 4 verschiedenen Orten im Fall eines Angriffs Signale mit Raketen gegeben werden, so daß man beym ersten 3, bey jedem folgenden aber um 3 mehr steigen lassen müßte, damit man an ihrer Anzahl alsbald erkennen könnte, welches der angegriffene Ort sey; und man verlangt zu wissen: wie viel Raketen diese Signale erforderten?

Weil das erste Glied $= 3$, die Differenz auch $= 3$, und die Anzahl der Glieder $= 4$,

so ist das letzte Glied $= 3 + (4 - 1).\ 3 = 12$;

und die Anzahl der Raketen ist $\frac{(12 + 3).4}{2} = 15.2 = 30$.

Die Summe der ersten 1000 Zahlen unsers Zahlensystems ist gleich $\frac{(1 + 1000).\ 1000}{2} = 500500$.

§. 210.

210.

Die Summe der hundert ersten ungraden Zahlen zu finden.

das 1ste Glied ist $1 = 2 . 1 - 1$
= 2te = = $3 = 2 . 2 - 1$
= 3te = = $5 = 2 . 3 - 1$
= 4te = = $7 = 2 . 4 - 1$
= = =
= = =
= = =
also das 100ste = = $199 = 2 . 100 - 1$

Man findet nemlich jede verlangte ungerade Zahl von 1 an gezählt, wenn man von dem doppelten der wie vielsten sie seyn soll 1 abzieht. Denn die 100ste ungerade Zahl ist, da 1 das erste Glied und 2 die Differenz der Progression ist, gleich $1 + (100 - 1) . 2 = 1 + 2 . 100 - 2 = 2 . 100 - 1$. Die 37ßigste ungerade Zahl ist gleich $1 + (37 - 1) . 2 = 1 + 2 . 37 - 2 = 2 . 37 - 1$, und so in jedem andern Falle.

Die Summa der ersten hundert ungeraden Zahlen ist folglich gleich

$$\frac{[1 + (2 . 100 - 1)] . 100}{2}$$

$$\frac{2 . 100 . 100}{2} = 100 . 100 = 100^2.$$

Die Summa der ersten 37 ungeraden Zahlen ist gleich

$$\frac{[1 + (2 \cdot 37 - 1)] \cdot 37}{2}$$

$$= \frac{2 \cdot 37 \cdot 37}{2} = 37 \cdot 37 = 37^2$$

Schon hieraus folgert man die Regel

Man findet die Summe der ungeraden Zahlen von 1 an, wenn man ihre Anzahl quadrirt.

Denn in einer solchen Progression ist, wie wir gesehen haben, das letzte Glied immer gleich die doppelte Anzahl der Glieder weniger 1, setzt man hierzu das erste Glied 1, so erhält man die doppelte Anzahl der Glieder, dieses mit der Anzahl der Glieder multiplicirt giebt offenbar das doppolte Quadrat der Anzahl der Glieder, folglich ist die gesuchte Summe die Hälfte hiervon, d. h. gleich dem Quadrate der Anzahl der Glieder.

Ist umgekehrt die Summe einer arithmetischen Progression der ungeraden Zahlen von 1 an gegeben, so giebt die Quadratwurzel aus dieser Summe die Zahl der Glieder.

Ist das letzte Glied einer solchen Progression gegeben, so findet man daraus die Anzahl der Glieder, oder die wievielste ungerade Zahl sie von vorne an gezählt ist, wenn man dies um 1 vermehrte letzte Glied mit 2 dividirt.

Z. B. Es sey 199 das letzte Glied so ist $\frac{199+1}{2} = \frac{200}{2}$

= 100 die Anzahl der Glieder

wäre 73 das letzte Glied so ist $\frac{73+1}{2} = \frac{74}{2}$

= 37 die Anzahl der Glieder.

Denn da ein solches letzte Glied das doppelte von der Anzahl der Glieder weniger 1 ist, so entstehet das dopdelte der Anzahl der Glieder, wenn man 1 zum letzten Gliede addirt, also giebt die Hälfte dieser Summe das Gesuchte.

Von den vieleckigten oder Polygonalzahlen, und deren Anwendung zur Berechnung der Kugelhaufen.

211.

Addirt man successive, 2, 3, 4... Glieder einer mit 1 anfangenden arithmetischen Reihe, so haben die Summen in der Ordnung, wie sie entstehen, die Eigenschaft, daß, wenn ihre Einheiten durch Puncte oder Kugeln vorgestellt werden, die man Reihenweise neben und unter einander ligt, die Figur eines Dreyecks, oder Vierecks, oder Fünfecks, u. s. w. gebildet werden kann, je nachdem die Differenz der Progression 1, 2, 3, 4.... ist; weshalb diese Summen **vieleckigte** oder **Polygonalzahlen** genannt werden.

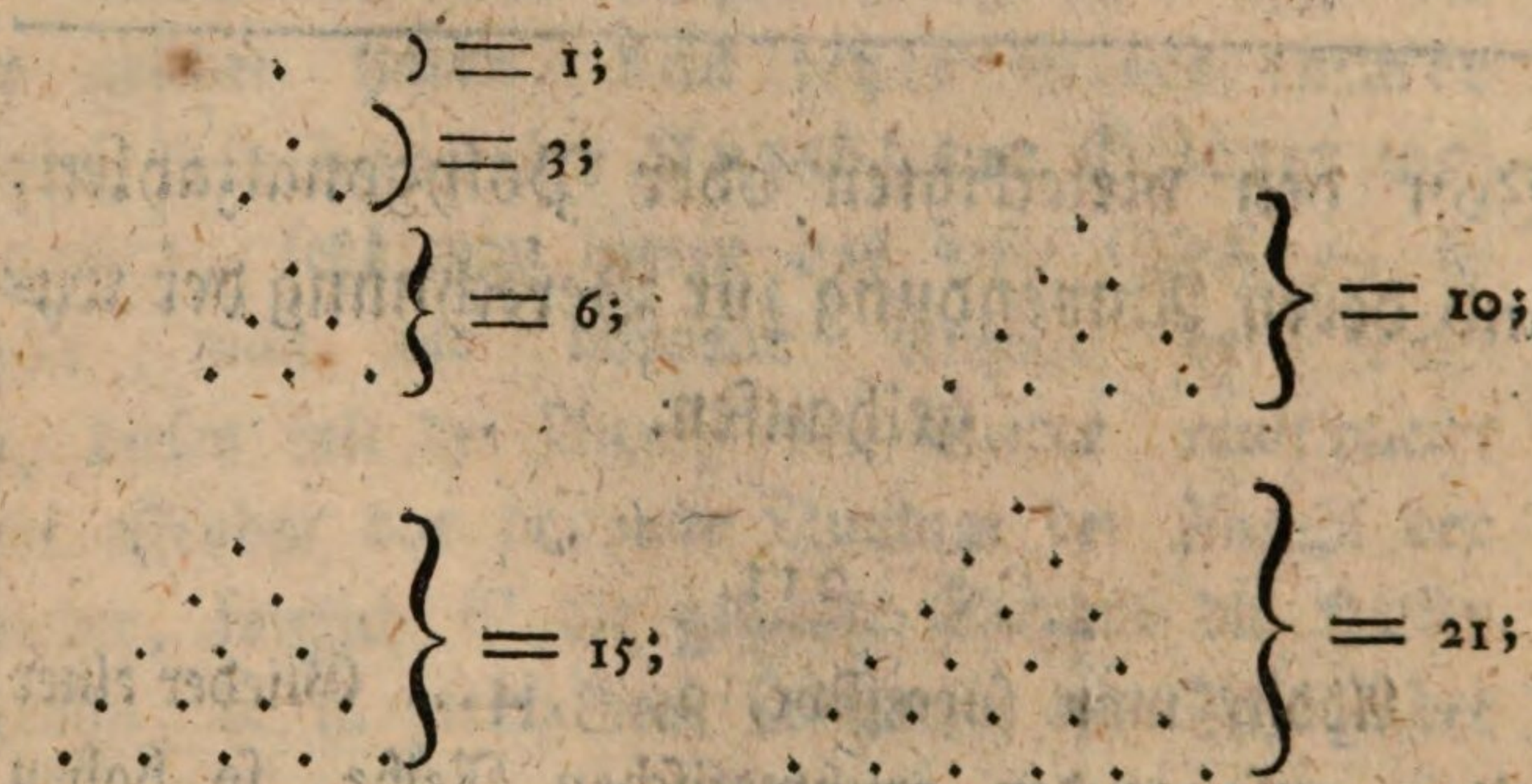
Nehmen wir z. B. gedachte Summen in erwähnter Ordnung von der Progression $\frac{\cdot}{1}$ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 . . . .

so geben sie die Dreyeckigtenzahlen (Triangularzahlen), nemlich

$$\left.\begin{aligned} 1 &= 1\\ 1+2 &= 3\\ 1+2+3 &= 6\\ 1+2+3+4 &= 10\\ 1+2+3+4+5 &= 15\\ 1+2+3+4+5+6 &= 21 \end{aligned}\right\}$$

u. s. w.

Diese Zahlen können wir durch Puncte oder auch durch Kugeln von einerley Größe welche sich einander berühren: folgender Gestalt vorstellen.

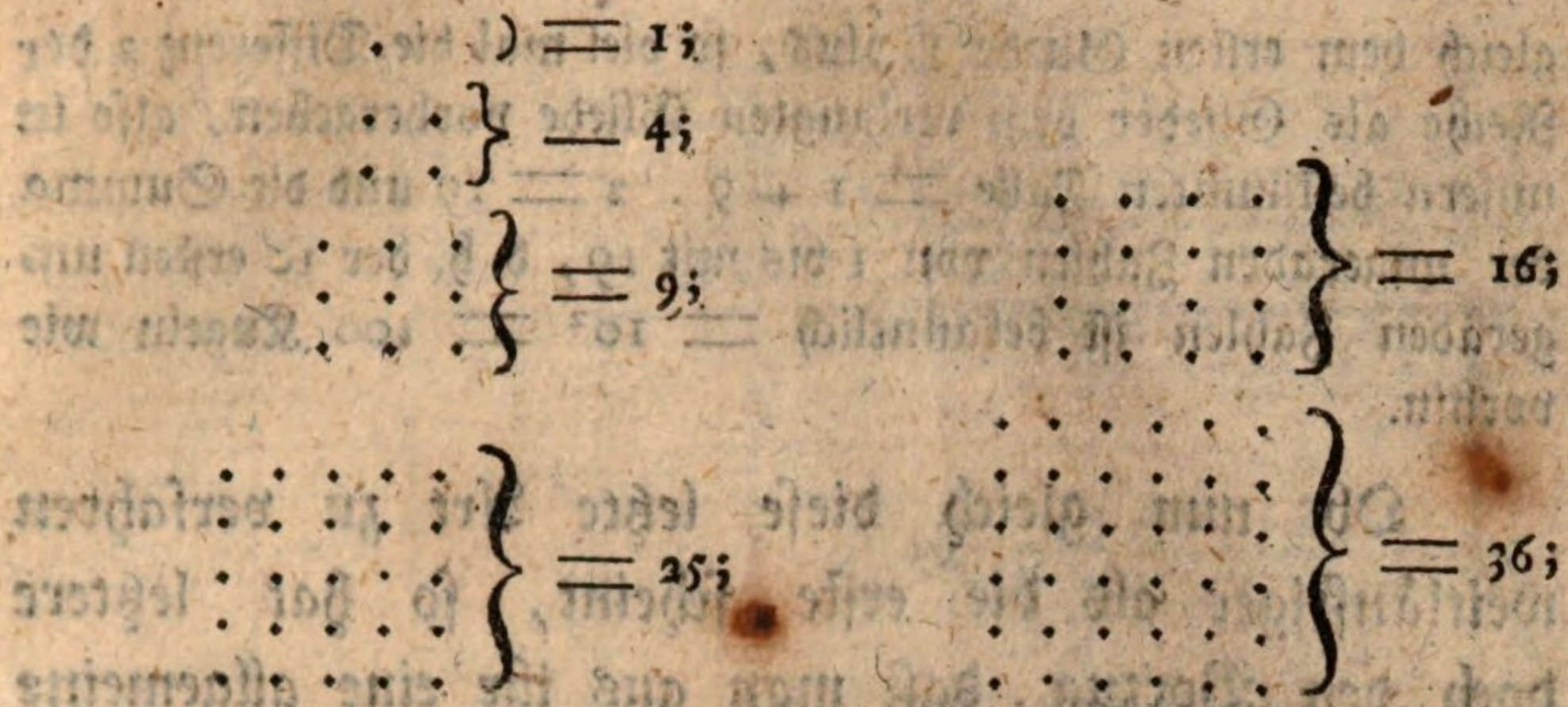


u. s. w. welche Figuren, wenn sie aus Kugeln bestehen, dreyeckigte Schichten heißen.

Aus der Progression ∴ 1, 3, 5, 7, 9, 11, ...
entstehen die viereckigte, oder Quadratzahlen, nemlich

$$\begin{aligned} 1 &= 1 = 1^2\\ 1+3 &= 4 = 2^2\\ 1+3+5 &= 9 = 3^2\\ 1+3+5+7 &= 16 = 4^2\\ 1+3+5+7+9 &= 25 = 5^2\\ 1+3+5+7+9+11 &= 36 = 6^2 \end{aligned}$$

u. s. w.



u. s. w. welche Figuren aus Kugeln gelegt, viereckigte Schichten heißen.

Sowohl in den dreyeckigten, als auch in den viereckigten Schichten, bemerken wir, daß die Seite einer jeden so viele Kugeln enthält, als Reihen in ihr angetroffen werden, oder als Glieder in vorgedachten Progressionen sind summirt worden. Wir könnten demnach die Menge Kugeln einer dreyeckigten Schicht aus der Menge der Kugeln einer ihrer Seiten bestimmen, denn es ist bloß die Summe der natürlichen Zahlen von 1 bis zu der Menge Kugeln einer ihrer Seiten.

Die Bestimmung einer viereckigten Schicht erfordert, daß man das so vielte Glied der Progression der ungeraden Zahlen bestimmt, d. h. die so vielte ungerade Zahl, als die Anzahl der in ihrer Seite euthaltenen Kugeln anzeigt, um dann nach diesen bekannten Gliede die Menge der in der Schicht enthaltenen Kugeln zu finden.

Z. B. Die Seite der zehnten viereckigen Schicht enthält 10 Kugeln und also die ganze Schicht 10 . 10 = 100 Kugeln. Man kann aber auch so rechnen die 10te ungerade Zahl ist 2.10 — 1, oder welches zu unsrer gegenwärtigen Absicht dienlicher ist, das 10te Glied der Reihe der ungeraden Zahlen ist

gleich dem ersten Gliede 1 plus, so viel mal die Differenz 2 der Reihe als Glieder dem verlangten Gliede vorhergehen, also in unsern bestimmten Falle $= 1 + 9 . 2 = 19$ und die Summa der ungeraden Zahlen von 1 bis mit 19, d. h. der 10 ersten ungeraden Zahlen ist bekanntlich $= 10^2 = 100$ Kugeln wie vorhin.

Ob nun gleich diese letzte Art zu verfahren weitläuftiger als die erste scheint, so hat letztere doch den Vorzug, daß man aus ihr eine allgemeine Regel zu Summirung der einzelnen Schichten der dreyeckigten sowohl als der viereckigten Kugelhaufen ableiten kann.

212.

Da die Seiten der nach und nach entstandenen Schichten in beyderley Kugelhaufen, 1, 2, 3, 4, ... Kugeln haben, so setzen wir diese Zahlen unter einander in eine Reihe, (wie beystehende Tabelle zeigt, deren weitere Erklärung folgt) und setzen darüber Reihe für die Seiten.

Ferner, weil die Reihen der Schichten so viele Kugeln haben, als die Summe der Glieder der zu ihnen gehörigen Progressionen anzeigen, so stellen wir diese ganz allgemein dar, nehmlich in zweyen Theilen, wovon der erste das erste Glied der Progression, und der andere die Menge der in ihnen enthaltenen Differenzen angiebt, also daß das erste Glied $= 1$: das zweyte $= 1 + 1$. Diff.; das dritte $= 1 + 2$. Diff.; das vierte $= 1 + 3$. Diff. . . . ist und setzen diese Glieder wieder in eine Reihe untereinander neben voriger, das giebt in der Tabelle die Columme II.

glei
Re
uns
der
ger
vor

wei
doc
Re
drei
fen

nen
4,
len
Tab
ſetze

Ku
thne
dieſe
wov
und
Diſſ
das
2. D
ſetzei
der
ſumi

Würde demnach gefragt: wie viel Kugeln enthält das 7te Glied der Reihe für die Schichten? so sucht man in der Tabelle Columme I die Zahl 7 auf, darneben stehet in der Columme II die Zahl 1 + 6. Differenz. Für dreyeckigte Schichten ist bekanntlich die Differenz der zugehörigen Progression gleich 1 und für viereckigte Schichten gleich 2; daher die obige gesuchte Anzahl Kugeln für dreyeckigte Schichten $= 1 + 6 . 1 = 7$ Kugeln, und für viereckigte Schichten $= 1 + 6 . 2 = 13$ Kugeln.

213.

Wir haben oben § 212 gezeigt daß die Schichten nach und nach gefunden werden, wenn man so viel Glieder der zu ihnen gehörigen Progression addirt, als Kugeln in einer Reihe der Schicht liegen, oder als die Zahl angiebt, die anzeigt die wievielste Schicht gefordert wird. Wir erhalten also die Columme III der Tabelle, wenn wir nach und nach die Glieder der Columme II summiren.

Demnach giebt

das 1ste Glied . . . . $= 1$

" 2te " . . . . . . $(1+1)+1$. Diff. . . . . . $= 2 + \frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2}$ Diff.

" 3te " . . . . . $(1+1+1)+(1+2)$. Diff. . . . $= 3 + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2}$. Diff.

" 4te " . . . $(1+1+1+1)+(1+2+3)$. Diff. . . $= 4 + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2}$. Diff.

" 5te " . . $(1+1+1+1+1)+(1+2+3+4)$. Diff. . $= 5 + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2}$. Diff.

" 6te " . $(1+1+1+1+1+1)+(1+2+3+4+5)$. Diff. $= 6 + \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2}$. Diff.

" " "

" " "

" " "

" " "

Bey dieser Summirung nehmen wir leicht folgendes Gesetz gewahr, die Summe bestehet aus zwey Theilen, davon der eine Theil die Summe von so viel Einheiten ist, als Glieder summirt werden, und der zweyte Theil die Summe von so viel von 1 an auf einander folgenden natürlichen Zahlen ist, als Glieder summirt werden, weniger 1. Wird also die 20ste Schicht verlangt, so hat man $20 + \frac{19 \cdot 20}{1 \cdot 2}$. Differenz; die 17te Schicht ist $17 + \frac{16 \cdot 17}{1 \cdot 2}$. Differenz.

Wir haben daher folgende Regel.

Um die Anzahl der Kugeln einer Schicht zu finden, addire man zu der Zahl, welche die Menge Kugeln ihrer Seite anzeigt, die Differenz ihrer Progression so vielmal, als das halbe Product eben dieser Zahl in eine andere, welche 1 weniger enthält, angiebt.

Die Menge Kugeln in der 12ten dreyeckigten Schicht also gleich

$$12 + \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} = 12 + 66 = 78 \text{ Kugeln}$$

Die Menge der Kugeln in der 12ten viereckigten Schicht ist gleich $12 + \frac{11 \cdot 12}{1 \cdot 2} \cdot 2 = 12 + 66 \cdot 2 = 144 = 12^2$

214.

Summirt man nach und nach die Schichten d. h. summirt man nach und nach die Polygonal-Zahlen §211, so entstehen Zahlen die man Pyramidalzahlen nennt, weil die Kugel Schichten nach und nach auf einandergelegt, je nachdem sie dreyeckigt, viereckigt u. s. w. sind, Kugelhaufen geben, welche die Gestalt einer dreyeckigten, viereckigten u. s. w. Pyramide haben. Die Summen der

Schichten geben also nach und nach die Glieder der Columme IV in der Tabelle. Die Glieder dieser Columme findet man auf folgende Art. Jedes Glied der IV Columme bestehet aus zwey Theilen, davon der erste Theil immer die Summe der ersten Theile der in der III Columme enthaltenen Glieder bis zu dem in Redestehenden Gliede enthält, d. h. die Summe der von 1 an, in natürlicher Ordnung aufeinander folgenden Zahlen bis zu der Zahl, des verlangten Gliedes, der zweyte Theil ist die Summe der zweyten Theile der III Columme, d. h. die Producte in die Differenzen die immer ein Glied weniger als die ersten Theile ausmachen. Die Summe der ersten Theile zu finden leidet also keine Schwierigkeit, und was die Differenzen anbetrift, so ersuche ich folgendes Verfahren einige Aufmerksamkeit zu schenken.

$\frac{1 \cdot 2}{1 \cdot 2}$. Diff. ist $=$ $\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3}$. Diff.

ferner

$\left(\frac{1 \cdot 2 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2}\right)$. D. ist $=$ $\frac{2 \cdot 3}{1 \cdot 2}\left(\frac{1}{3} + 1\right)$. D. $=$ $\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Diff.

und

$\left(\frac{2 \cdot 3 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2}\right)$. D. ist $=$ $\frac{3 \cdot 4}{1 \cdot 2}\left(\frac{2}{3} + 1\right)$. D. $=$ $\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Diff.

und

$\left(\frac{3 \cdot 4 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2}\right)$. D. ist $=$ $\frac{4 \cdot 5}{1 \cdot 2}\left(\frac{3}{3} + 1\right)$. D. $=$ $\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Diff.

und

$\left(\frac{4 \cdot 5 \cdot 6}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2}\right)$. D. ist $=$ $\frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2}\left(\frac{4}{3} + 1\right)$. D. $=$ $\frac{5 \cdot 6 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ Diff.

u. s. w.

Das Gesetz ist einleuchtend, so wie man nun auch leicht die Richtigkeit der folgenden Regeln zugeben wird.

Um die Menge Kugeln eines pyramidenähnlichen Kugelhaufens zu finden, nehme man ein halbes Product von der Zahl welche die Menge Kugeln einer Seite seiner Grundschicht anzeigt, in eine andere, welche um 1 größer ist, und addire zu demselben den 6ten Theil eines Products von 3 Factoren, wovon der eine um 1 kleiner, der andere um 1 größer, und der dritte der ebengedachten Seitenzahl gleich ist mit der Differenz um welche zwey Reihen einer Schicht von einander verschieden sind.

Würde demnach gefragt: Wie viel Kugeln enthält ein dreyeckiger Kugelhaufen, dessen eine Seite 9 Kugeln hat? so würden wir antworten, weil die Differenz der Kugelreihen 1 ist

er enthalte $\frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 45 + 120 = 165$ K.

Würde aber unter gleicher Bedingung die Frage bey einem viereckigten gethan, wo die Differenz der Reihen 2 ist; so müßten wir antworten: er enthalte $\left(\frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3}\right) \cdot 2$

$= 45 + 120 \cdot 2 = 45 + 240 = 285$ Kugeln.

Da bey der Artillerie der Bequemlichkeit wegen vorgedachte Kugelhaufen, und noch länglichte aufgestellt werden; so hat man, dieselbe leicht berechnen zu können, folgende ganz einfache Regeln erfunden, die wir hier aus vorigem allgemeinen Satze ableiten können.

Regel zur Berechnung der dreyeckigten Kugelhaufen.

Die Menge Kugeln eines dreyeckigten Kugelhaufens zu bestimmen, nehme man die Anzahl einer Seite mit zwey andern um 1 steigenden Zahlen als Factoren, mache von ihnen ein Product, und nehme davon den sechsten Theil.

Hätte also die Seite, wie vorher, 9 Kugeln; so muß der Haufen $\frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3} = 3 \cdot 5 \cdot 11 = 165$ Kugeln enthalten.

Denn da diese Anzahl nach dem vorgetragenen Satze durch $\frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ vorgestellt werden muß, und der Werth dieser Brüche sich in nichts verändern kann, wenn die Glieder des ersten mit einerley Zahl multiplicirt werden, so ist

$$\frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= \frac{9 \cdot 10 \cdot 3 + 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Es sind aber in diesem entstandenen Ausdrucke, der die Summe zweyer Producte vorstellet, die Zahlen 9 . 10 gemeinschaftliche Factoren der Zahlen 3 und 8; also kann man diese beyden addiren, und

dann mit gedachten Factoren multipliciren, folglich

$$\frac{9 \cdot 10 \cdot 3 + 8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{9 \cdot 10 \,(3 + 8)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= \frac{9 \cdot 10 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Hätte die Reihe der untersten Schicht eines solchen Kugelhaufens 17 Kugeln, so hätte der Haufen

$$\frac{17 \cdot 18}{1 \cdot 2} + \frac{16 \cdot 17 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= \frac{17 \cdot 18 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{16 \cdot 17 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= \frac{17 \cdot 18 \cdot 3 + 16 \cdot 17 \cdot 18}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= \frac{17 \cdot 18 \,(3 + 16)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{17 \cdot 18 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$ Ku-

geln.

Aus diesen zwey Beyspielen wird man schon wahrnehmen, daß die hier gewiesene Reduction allgemein wahr ist.

Regel zur Berechnung der viereckigten Kugelhaufen.

Man nehme die Kugeln einer Seite d'oppelt, mache von der entstehenden Summe und zweyen andern Zahlen, welche um 1 steigen, ein Product, und nehme davon den 12 Theil.

Hätte demnach wiederum die Seite 9 Kugeln, so würde dieser Haufen $\frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = 3 \cdot 19 \cdot 5$ = 285 Kugeln enthalten.

Denn da nach dem allgemeinen Satze die Menge der in diesem Haufen enthaltenen Kugeln $\frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10}{1 \cdot 2 \cdot 3} \cdot 2$ vorgestellt wird, und sein Werth durch Multiplication der Glieder eines Bruchs mit einerley Zahlen nicht verändert werden kann, so folgt, daß

$$\frac{9 \cdot 10}{1 \cdot 2} + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 2 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$= \frac{9 \cdot 10 \cdot 4 (3 + 8 \cdot 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{(2 \cdot 9) \cdot (2 \cdot 10) \cdot (19)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$= \frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ ist.}$$

Enthielte die Reihe der untersten Schicht 17 Kugeln, so hat der ganze Haufen

$$\frac{17 \cdot 18}{1 \cdot 2} + \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 2}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

$$= \frac{17 \cdot 18 \cdot 4 \cdot 3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + \frac{16 \cdot 17 \cdot 18 \cdot 2 \cdot 4}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$= \frac{17 \cdot 18 \cdot 4 (3 + 16 \cdot 2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{(17 \cdot 2) \cdot (18 \cdot 2) \cdot 35}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$$

$$= \frac{34 \cdot 35 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} \text{ Kugeln.}$$

Da der kleinste Factor welchen die obige Regel giebt immer eine gerade Zahl seyn muß, so muß auch der größte Factor eine gerade Zahl seyn demnach ist 4 ein gemeinschaftlicher Factor, und der Ausdruck.

$\frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ läßt sich daher abkürzen

$$\frac{18 \cdot 19 \cdot 20}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} = \frac{9 \cdot 10 \cdot 19}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{9 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 9 + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

oder auch $= \frac{9 \cdot 10 \cdot (2 \cdot 10 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$ und $\frac{34 \cdot 35 \cdot 36}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$

$$= \frac{17 \cdot 18 \cdot 35}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{17 \cdot 18 \cdot (2 \cdot 17 + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$ oder auch

$$= \frac{17 \cdot 18 \cdot (2 \cdot 18 - 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

woraus sich andere Regeln ableiten lassen, die ich den Anfänger zur Uebung überlasse.

Regel zur Berechnung der länglichten Kugelhaufen.

Um die Anzahl Kugeln eines länglichten Kugelhaufens zu finden, zähle man die Kugeln, welche in der Grundschicht nach der Breite und Länge liegen, wie auch die von seiner zu oberst liegenden Reihe, oder seines Rückens: mache sodann ein Product dreyer Factoren von welchen der erste die Anzahl Kugeln seiner Breite, der zweiten 1 mehr, und der Dritte diejenige Summe angiebt, welche durch die Menge Kugeln des Rückens, und durch die von seiner Länge, aber doppelt genommen, bestimmet

wird; und nehme von dem entstehenden Producte den 6ten Theil.

Wäre demnach von einem länglichten Haufen bekannt, daß er zur Länge 12 Kugeln, zur Breite 5 Kugeln, und zur obersten Reihe 8 Kugeln hat, und man wollte wissen: wie viel er enthalte? so setzen wir,

$\frac{5 \cdot 6 \cdot (2 \cdot 12 + 8)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 32}{1 \cdot 2 \cdot 3} =$ 160, und antworten: er enthalte 160 Kugeln.

Denn betrachten wir ihn genau, so finden wir, daß er aus einem viereckigten Haufen, welcher die Anzahl Kugeln in der Breite zur Seite seiner Grundschicht hat, und aus so vielen dreyeckigten Schichten bestehet, als da Kugeln übrig bleiben, wenn die in der Breite von denen in der Länge weggenommen werden.

Nun enthält der viereckigte Haufen nach dem was so eben erwiesen ist

$$\frac{5 \cdot 6 \cdot (2 \cdot 5 + 1)}{1 \cdot 2 \cdot 3} = \frac{5 \cdot 6 \cdot 11}{1 \cdot 2 \cdot 3}$$

Da aber die Länge 12 Kugeln, und die Breite 5 hat, so sind noch im Haufen $12 - 5 = 7$ Schichten deren jede einer ihrer Seiten 5 Kugeln enthält.

Nun muß eine jede Schicht $\frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2}$ Kugeln, (§ 211) mithin sämmtliche Schichten $\frac{5 \cdot 6}{1 \cdot 2} \cdot 7$, und also dieser länglichte Haufe

$$\frac{5.6.11}{1.2.3}+\frac{5.6.7}{1.2}=\frac{5.6.11}{1.2.3}+\frac{5.6.7.3}{1.2.3}$$

$$=\frac{5.6}{1.2.3}.(11+21)=\frac{5.6.32}{1.2.3}$$

$$=\frac{5.6.(2.12+8)}{1.2.3}=160$$ Kugeln enthalten.

Da bey dreyeckigten und viereckigten Kugelhaufen, die Anzahl Kugeln welche auf einer Seite der Grundfläche in einer Reihe liegen, immer der Anzahl Schichten gleich ist, so ist es auch leicht die Anzahl Kugeln zu bestimmen, welche in einen unvollständigen Kugelhaufen liegen. Denn man darf nur einen Kugelhaufen so berechnen, als wenn er ganz wäre, sodann auch den abgängigen Theil bestimmen, und solchen von dem ganzen Kugelhaufen abziehn, so giebt der Rest die Anzahl Kugeln des abgestutzten Kugelhaufens.

Es sey z. B. bey einem viereckigten Kugelhaufen die unterste Reihe 20, und die obere Reihe 8 Kugeln, so ist die Anzahl Kugeln, wenn der Kugelhaufen ganz voll wäre

$$=\frac{20.21(2.20+1)}{1.2.3}=2870$$; da aber oben ein Kugelhaufen fehlet, welcher zur untersten Seite 7, und folglich in allen $$\frac{7.8.(2.7+1)}{1.2.3}=140$$ Kugeln gehören, so bleibt der Inhalt des abgestutzten Haufens $2870-140=2730$ Kugeln.

Da bey einem länglichten Kugelhaufen in der schmalen Seite der Grundfläche eben so viele Kugeln als in der Eckseite liegen, so kann ein unvollständiger länglichter Haufen eben so, wie die un-

vollständigen dreyeckigten oder viereckigten Haufen berechnet werden.

Von den geometrischen Progressionen.

215.

Die geometrische Progression ist eine Folge von Gliedern, davon ein jedes das ihm vorhergehende gleich vielmal enthält, oder in ihm enthalten ist:

Z. B. diese Reihe . . . . . .

∴ 3, 6, 12, 24, 48, 96, 192 . . . . . .

ist eine geometrische Progression, weil jedes Glied das ihm vorhergehende gleich vielmal, hier 2 mal enthält.

Diese Zahl die anzeigt wie viel mal ein Glied in dem nächst vorhergehenden oder folgenden Gliede enthalten ist, heißt der Nahme oder Exponent der Progression.

Die vier vor der Progression geschriebene Puncte, haben dieselbe Bedeutung als die zwey vor der arithmetischen Progression geschriebene Puncte.

Die Progression heißt wachsend (steigend) oder abnehmend (fallend), jenachdem daß die Glieder wachsend oder abnehmend fortgehen.

Wir betrachten die geometrische Progression immer als wachsend, weil die Eigenschaften in der einen und in der andern dieselben sind, wenn man das Wort multipliciren in dem Worte Dividiren, und das Wort enthalten in die Worte enthalten seyn, verändert.

Weil das zweyte Glied das erste so oft enthält, als der Nahme Einheiten hat, so bestehet solches aus dem ersten Gliede in den Nahmen multiplicirt.

Weil das dritte Glied, das zweyte so oft enthält als der Nahme Einheiten hat, so ist es also zusammengesetzt aus dem zweyten Gliede in den Nahmen multiplicirt, und folglich aus dem ersten Gliede multiplicirt durch den Nahmen und noch mal durch den Nahmen; d. h., aus dem ersten Gliede multiplicirt in den Quadrate des Nahmens, oder in der zweyten Potenz des Nahmen.

Weil das viertte Glied das dritte so vielmal enthält als der Nahme Einheiten hat, so ist es also zusammengesetzt, aus dem dritten Gliede in den Nahmen multiplicirt, und folglich aus dem ersten Gliede in dem Quadrate des Nahmen multiplicirt, und nochmals mit den Nahmen multiplicirt; d. h. durch den Cubus, oder der dritten Potenz des Nahmen.

Z. B. In der oben stehenden Progression, bestehet 6 aus dem ersten Gliede 3, in den Nahmen 2 multiplicirt; 12 bestehet aus dem ersten Gliede 3, durch das Quadrat 4 des Nahmen 2 multiplicirt; 24 ist zusammengesetzt aus dem ersten Gliede 3 in den Cubus 8 des Nahmen 2 multiplicirt.

216.

Setzt man dasselbe Raisonement fort, so sieht man, daß ein beliebiges Glied der geometrischen Progression, bestehet aus dem ersten Gliede multiplicire in einer Potenz

des Nahmen, welche so groß ist als die Anzahl der dem verlangten Gliede vorhergehenden Glieder. Wäre also das erste Glied der Progression die Einheit, so wird jedes andre Glied, aus den Nahmen selbst entstehen, wenn man denselben zu einer Potenz erhebt, die durch die Anzahl der dem verlangtem Gliede vorangehenden Glieder angezeigt wird; denn die Multiplication durch das erste Glied, welches die Einheit ist, vermehrt das Product nicht.

Um eine Zahl zu einer vorgegebenen Potenz zu erheben; z. B zur 7ten, so muß man, dem Begriff zufolge, welchen wir von den Potenzen gegeben haben, diese Zahl sechsmal nach einander mit sich selbst multipliciren; um also 2 zur 7ten Potenz zu erheben, so sagt man 2 mal 2 macht 4, 2 mal 4 macht 8, 2 mal 8 macht 16, 2 mal 16 macht 32, 2 mal 32 macht 64, 2 mal 64 macht 128, welches die 7te Potenz von 2 ist; man kann aber die Operation auf verschiedene Arten abkürzen; Z. B. man kann zuerst 2 quadriren, welches 4 macht, 4 cubiren, welches 64 giebt, und diese mit 2 multipliciren, welches 128 macht; oder auch man cubirt 2, welches 8 giebt; quadriret 8, dieses giebt 64; und 64 durch 2 multipliciren, welches 128 giebt; mit einem Worte man verfahre dabey wie man will, nur muß 2 sich 7 mal als Factor in dem Producte befinden.

217.

Das Princip, welches wir so eben über die Entstehung eines beliebigen Gliedes der Progression vorgetragen haben (§216), und die so eben gemachte Bemerkung, können dazu dienen, ein Glied der Progression welches man will zu berechnen, ohne das man genöthiget ist die ihm vorhergehenden zu berechnen.

Verlangt man z. B. das 12 Glied von der Progression . . .

$\div$ 3, 6, 12, 24, ...

so weiß man (§. 216.) daß dieses 12te aus dem ersten Gliede in der Potenz des Nahmens multiplicirt, die durch die Anzahl der den 12ten Gliede vorangehenden Glieder angegeben wird, besteht; Man siehet also, daß, um das verlangte Glied zu bilden, man 3 mit der 11ten Potenz des Nahmens 2 multipliciren muß; um diese 11te Potenz zu machen, cubirt man 2, welches 8 giebt; man cubirt 8, dieses giebt 512 als die 9te Potenz von 2; und endlich multiplicirt man 512, die 9te Potenz des Nahmen, durch 4, die 2te Potenz des Nahmen, und man hat 2048 für die 11te Potenz von 2; Man multiplicirt also 2048 mit 3, und hat 6144 für das 12te Glied der Progression.

218.

Eine andere Anwendung welche man von denselben Princip machen kann, ist diese, daß man zwischen zwey gegebenen Zahlen so viele mittlere geometrische Proportionalzahlen als man will, finden kann.

Verlangte man drey mittlere geometrische zwischen 4 und 64; so sieht man mit ein wenig Aufmerksamkeit, daß diese drey mittlern geometrische, 8, 16, 32 sind; in That machen

$\div\div$ 4, 8, 16, 32, 64

eine geometrische Progression aus; giebt man aber andere Zahlen als 4 und 64 auf, oder man verlangte jede andere Anzahl mittlere geometrische, so würde man sie nicht so leicht finden.

Hier folgt nun wie man sie zufolge des in redestehenden Princip finden kann.

Die Frage reducirt sich darauf, den Nahmen zu finden, welcher in der Progression herrschen muß, weil, wenn der Nahme gefunden ist, man leicht die Glieder durch successive Multiplication dieses Nahmen bilden kann.

Gesetzt es sey z. B. die Frage, neun mittlere geometrische

zwischen 2 und 2048 zu finden. 2048 wäre also das letzte Glied einer geometrischen Progression die mit 2 anfängt, und die neun Glieder zwischen den ersten und letzten Gliede haben soll; 2048 bestehet also aus dem ersten Gliede 2, mit der durch die Anzahl der 2048 vorhergehenden Glieder angezeigten Potenz des Nahmens multiplicirt; wenn man also (§. 67.), 2048 durch das erste Glied dividirt, so ist der Quotient, die durch die Anzahl der 2048 vorhergehenden Glieder anzeigte Potenz, des Nahmen; sucht man daher die Wurzel dieser Potenz, so hat man den Nahmen: weil zwischen 2 und 2048, neun Glieder seyn sollen, so sind nothwendig 10 Glieder vor 2048, jene Potenz muß daher die 10te seyn, mithin muß man die 10te Wurzel, aus dem Quotienten ausziehen, welchen die größte Zahl 2048, durch die kleinste 2 dividirt, gegeben hätte.

219.

Da man dasselbe Raisonnement in allen andern Fällen machen kann, so können wir daraus allgemein schließen, um zwischen zwey gegebenen Zahlen, so viel mittlere geometrische einzuschalten, als man will, so muß man die größte von diesen beyden Zahlen durch die kleinste dividiren, und aus dem hieraus entstehenden Quotienten, eine Wurzel ziehen deren Grad durch die um eine Einheit vermehrte Anzahl mittlere geometrische, angegeben wird.

Also, um wieder zu unserm Beyspiele zu kommen, man dividirt 2048 durch 2, welches 1024 giebt, wovon man die 10te Wurzel sucht *); sie ist 2; mithin ist der Nahme 2; um also

*) Wir haben die Methode aus einer Zahl die 10te Wurzel auszuziehen nicht gegeben, es verhält sich aber mit dieser Wurzel wie mit der Quadrat- und Cubicwurzel: Die Quadratwurzel muß nur eine Ziffer haben, wenn die vorgegebene Zahl nur deren zwey hat; die Cubicwurzel muß nur eine Ziffer haben, wenn die

die vorbenannten mittlern geometrischen zu bilden, multiplicirt man das erste Glied 2, beständig mit den Nahmen 2; und nachdem man neun mittlere geometrische gebildet hat, kömmt man auf 2048, wie man solches hier sieht . . . .

÷ 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 512, 1024, 2048.

Ebenfalls, wenn man zwischen 6 und 48 vier mittlere geometrische verlangt, so dividirt man 48 durch 6, und aus dem Quotienten 8 zieht man die 5te Wurzel; da 8 keine genaue 5te Wurzel hat, so kann man niemals in Zahlen genau, zwischen 6 und 48 vier mittlere geometrische angeben. Man kann sich aber dieser Wurzel so viel nähern als man will, durch eine der Quadrat- und Cubikwurzel analogen Methode, und die wir in der Algebra lehren werden. Unterdessen ist es hinlänglich, daß man begreift, daß es möglich ist eine Zahl zu finden, die, viermal mit sich selbst multiplicirt sich mehr und mehr nähert 8 wieder hervorzubringen, und daß das nemliche für jede andere Zahl und für jede andere Wurzel gilt; und hieraus schließen wir daß zwischen zwey beliebige Zahlen, man immer so viel mittlere geometrische als man will finden kann, es sey ganz genau, oder durch eine so weit getriebene Näherung als man will, und dieses ist uns genug um bald zu den Logarithmen überzugehen.

220.

Beyspiele.

In einer wachsenden geometrischen Progression die Glieder durch ihre vorhergehenden Glieder auszudrücken. Es sey z. B. gegeben die Progression

∴ 1, 3, 9, 27, 81, 243, ...

Da 1 das erste Glied und 3 der Nahme ist, so ist

vorgegebene Zahl deren nur drey hat; ebenfalls wird die 10te Wurzel niemals mehr als eine Ziffer haben, so lange die vorgegebene Zahl deren nicht mehr als zehn hat; es verhält sich eben so bei andern Wurzeln; die 30ste Wurzel z. B. wird nur eine Ziffer haben, wenn die vorgegebene Zahl deren nur dreyßig hat; dieses wird eben so bewiesen, wie es bey der Quadrat- und Cubicwurzel geschehen ist.

$3 = 1 \cdot 3$
$9 = 3 \cdot 3 = 1 \cdot 3^2$.
$27 = 3 \cdot 9 = 1 \cdot 3^3$.
$81 = 3 \cdot 27 = 1 \cdot 3^4$.
$243 = 3 \cdot 81 = 1 \cdot 3^5$.

u. s. w.

Wäre die gegebene Progression

$\dot{\dot{\dot{}}}$ 2, 6, 18, 54, 162 . . .

so ist $6 = 2 \cdot 3$
$18 = 6 \cdot 3 = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2$
$54 = 18 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2 \cdot 3 = 2 \cdot 3^3$
$162 = 54 \cdot 3 = 2 \cdot 3^2 \cdot 3 = 2 \cdot 3^4$

u. s. w.

In einer fallenden geometrischen Progression die Glieder durch ihre vorhergehenden auszudrücken. Es sey gegeben die Progression

$\dot{\dot{\dot{}}}$ $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{50}$, $\frac{2}{250}$, $\frac{1}{1250}$, ...

Da $\frac{1}{2}$ das erste Glied und $\frac{1}{5}$ der Nahme ist

so ist $\frac{1}{10} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5}$

$\frac{1}{50} = \frac{1}{10} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5^2}$

$\frac{1}{250} = \frac{1}{50} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5^2} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5^3}$

$\frac{1}{1250} = \frac{1}{250} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5^3} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{5^4}$

u. s. w.

Das erste Glied einer Progression sey 1, und der Nahme 4, welches ist das 5te Glied?

Antw. $1 \cdot 4^4 = 1 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 4 = 256$, und also ist die Progression $\dot{\dot{\dot{}}}$ 1, 4, 16, 64, 256.

Es starb jemand, der vor 4 Jahren eine Präbende für 4000 Thl. gekauft, und seine davon erhaltenen jährlichen Einkünfte von 400 Thl. zum

Besten seiner Verwandten zurückgelegt hatte; man frägt: Wie viel Verlust dieselben an dem Capital von 4000 Thl. gehabt haben?

Da der Mann 4 Jahr lang 400 Thl. eingenommen hat, so haben die Verwandten 4 . 100 = 1600 Thl. bey seinem Tode vorgefunden, und ihr Verlust würde 4000 — 1600 = 2400 Thl. seyn, wenn nicht der Verstorbene das Capital zu 5 pr. C. und obenein die von ihm erhaltenen Zinsen als kleinere Capitalien unter gleichen pr. C. hätte austhun können. Um also das von diesen kleinern Capitalien und dem gegebenen entstehende Capital zu bestimmen muß man das 5te Glied einer Progression erforschen, davon das erste Glied 4000, und der Exponent $\frac{105}{100}$ $= \frac{21}{20}$ ist; mithin erhalten wir 4000 . $\frac{21^4}{20^4}$ $4000 = \frac{21^2}{20^2} \cdot \frac{21^2}{20^2}$ $= 4000 . \frac{441}{400} . \frac{441}{400} = \frac{194481}{40} = 4862\frac{1}{40}$ Thl., und zum Verluste $4862\frac{1}{40}$ Thl. — 1600 Thl. = 3262 Thl. $7\frac{1}{5}$ Pf.

Denn hätten wir geschlossen 100 Thl. geben zu 5 pr. C. 5 Thl., also 100 Thl. in einem Jahre 105 Thl; so müßte man auch setzen, um das von 4000 Thl. in einem Jahre entstehende Capital zu erhalten?

100 Th. : 105 Th. oder 20 : 21 = 4000 Th. : 4000 . $\frac{21}{20}$ Thl. Capital des ersten Jahres

Ferner 20 : 21 = 4000 . $\frac{21}{20}$ Thl. : 4000 . $\frac{21}{20} \cdot \frac{21}{20}$ = 4000 . $\frac{21^2}{20^2}$ Thl. Capital des 2ten Jahres

Ferner 20 : 21 = 4000 . $\frac{21^2}{20^2}$ Thl. : 4000 . $\frac{21^2}{20^2} \cdot \frac{21}{20}$ = 4000 $\frac{21^3}{20^3}$ Thl. Capital des 3ten Jahres

u. s. w.

Dergleichen Rechnung wird im gemeinen Leben Zins auf Zins-Rechnung genannt, bey der man bloß beobachten darf, daß man das Capital bey 5 pr. C. mit der so vielten Potenz vom Exponenten $\frac{21}{20}$ multipliciren muß, als das Capital Jahre gestanden hat. Bey 4 pr. C. nimmt man $\frac{104}{100}$ $= \frac{26}{25}$ statt $\frac{21}{20}$.

221.

Vergleichen wir die Glieder einer geometrischen Progression mit ihrem letzten Gliede, so ergiebt sich, daß ein jedes demjenigen Quotienten gleich ist, welcher entstehet, wenn man das Glied mit der sovielten Potenz des Nahmen dividirt, als Glieder dem genommenen nachfolgen.

So ist von der Progression $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1, 4, 16, 64, 256 . . .

das 4te Glied $64 = \frac{256}{4^1}$;

das 3te „ $16 = \frac{256}{4^2}$;

das 2te „ $4 = \frac{256}{4^3}$;

und das 1ste „ $1 = \frac{256}{4^4}$;

Demnach kann auch das erste Glied einer geometrischen Progression gefunden werden, wenn von ihr das letzte Glied, der Nahme und die Anzahl ihrer Glieder gegeben wird.

Ware z. B. von einer geom. Progr. das letzte Glied $= 162$, der Nahme, und die Menge ihrer Glieder $= 5$; so stehen nach dem ersten $5 - 1 = 4$ Glieder, und es muß das erste Glied $\frac{162}{3^4} = \frac{162}{81} = 2$ seyn; und wirklich ist die Progression

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 2, 6, 18, 54, 162.

Hiernach lassen sich ebenfalls Aufgaben der Zins auf Zins = Rechnung, wie

auch andere denen im §. 220 ähnliche auflösen.

Sollte z. B. gefragt werden: wie stark muß ein Capital gewesen seyn, was mit dem Bedinge 3 Jahr lang genutzt worden, daß es nach verflossener Zeit nebst Zinsen zu 5 pr. C. zurück bezahlet werde, und man habe 185220 Thl. erhalten? so müssen wir antworten, weil wegen der 3 Jahre die Progression 4 Glieder hat; es sey $185220 : \frac{21^3}{20^3} = 185220 . \frac{20^3}{21^3} = \frac{185220 . 8000}{9262}$ Thl. = 160000 stark gewesen, indem dieses Capital 3 Jahre lang zu Zins auf Zins ausgethan, das ausgezahlte (nach vorigen §) wieder hervorbringen muß.

222.

Da das letzte Glied jeder geometrischen Progression durch ein Product aus dem ersten Gliede und der so vielten Potenz des Nahmens, als die Progression Glieder weniger eins hat, vorgestellt werden kann, (216) also daß von der Progression

$\div\div$ 2, 6, 18, 54, 162,

das fünfte Glied $162 = 2 . 3^4$ ist; so folgt,

daß auch $\frac{162}{2} = 3^4$ seyn muß,

welcher Ausdruck zu erkennen giebt.

Um den Nahmen einer geometrischen Progression zu finden, wenn deren erstes und letztes Glied nebst der Anzahl ihrer Glieder bekannt sind. Dividire man das letzte durch das erste Glied und suche eine Zahl, die zur sovielten Potenz, als die Progression Glieder weniger eins hat, erhoben den erhaltenen Quotienten gleich ist; so ist solcher der verlangte Nahme.

Gesetzt, es habe eine geometrische Progression 4 Glieder, wovon das erste = 4, und das letzte = 256, so ist $^{2}\frac{5}{4}{}^{6} = 64$, die (4 — 1)te oder die 3te Potenz des Exponenten, oder seine Cubic-zahl; folglich muß der Nahme $= \sqrt[3]{64} = 4$, und die Progression $\div$ 4, 16, 64, 256 seyn.

Dieses ist auch bereits auf eine etwas andere Art oben gefunden worden.

223.

In der geom. Prog.

$\div$ 2, 6, 18, 54, 162

ist bekanntlich nach §. 222

$$1\frac{6}{2}{}^{2} = 3^{4},$$

wo uns der Exponent 4 des Nahmens 3 die Zahl der Glieder weniger eins anzeigt: mithin folgt:

Um die Anzahl Glieder einer geometrischen Progression, von der das erste und letzte Glied nebst den Nahmen gegeben sind, zu bestimmen, suche man den Quotienten der beyden gegebenen Glieder, und dividire diesen so oft mit den Nahmen, bis kein Rest bleibet. Sodann prüfe man, wieviel mal derselbe als Divisor gebraucht worden ist, vermehre die Zahl, welches dieses anzeigt um 1; so giebt die entstehende Zahl die Menge Glieder der Progression zu erkennen.

Wäre also von einer Progression das erste Glied = 2,

das

das letzte = 512, und der Nahme = 4; so ist der Quotient $5\frac{1}{2}^2 = 256$, und wir setzen:

	1 mal mit 4 dividirt	4)	256
noch	1	4)	46
	1	4)	16
	1	4)	4
	1	4)	1

folglich ist 4 mal der Nahme als Divisor gebraucht worden, und es muß die Progression 4 + 1 = 5 Glieder haben. Auch ist wirklich die Progression

$\dot{\div}$ 2, 8, 32, 128, 512.

Und wäre von einer geometrischen Progression das erste Glied 27, das letzte $\frac{84375}{1024}$, und der Nahme $\frac{5}{4}$,

so ist $\frac{84375}{1024} : 27 = \frac{3125}{1024}$,

und man erhält

zum 1sten mal $\frac{3125}{1024} : \frac{5}{4} = \frac{625}{256}$

" 2ten " $\frac{625}{256} : \frac{5}{4} = \frac{125}{64}$

" 3ten " $\frac{125}{4} : \frac{5}{4} = \frac{25}{16}$

" 4ten " $\frac{25}{16} : \frac{5}{4} = \frac{5}{4}$

u. zum 5ten mal $\frac{5}{4} : \frac{5}{4} = 1$;

folglich ist die Anzahl der Glieder der Progression 5 + 1 = 6, und sie selbst

$\dot{\div}$ 27, $\frac{135}{4}$, $\frac{675}{16}$, $\frac{3375}{64}$, $\frac{16875}{256}$, $\frac{84375}{1024}$

Man habe 185220 Thl. vom einem Capital von 160000 Thl. erhalten, was gewisse Jahre mit seinen Zinsen zu 5 pr. C. gestanden, man soll angeben, wie lange dieses geschehen ist?

Man gedenke sich die vorgegebenen Größen als erstes und letztes Glied einer geom. Progr., deren Nahme $\frac{21}{20}$ ist, und verfahre auf vorige Art; nemlich, wir schließen weil $\frac{18520}{10} = \frac{2261}{8000}$, so muß

Zum 1sten mal $\frac{2261}{8000} : \frac{21}{20} = \frac{441}{400}$
" 2ten " $\frac{441}{400} : \frac{21}{20} = \frac{21}{20}$
und " 3ten " $\frac{21}{20} : \frac{21}{20} = 1$ geben,

und demnach erhellet, daß 160000 Thl. sammt ihren Zinsen 3 Jahre gestanden haben, weil eben dieses ausgestellte Capital das 4te der Progression ausmacht.

Indessen müssen wir hier bemerken, daß nach dieser angezeigten Methode nur diejenigen Aufgaben aufgelößt werden können, wo der Quotient vom ersten und letzten Gliede durch den Nahmen nach und nach dividirt, zum letzlen Quotient, wie bisher; 1 giebt. Gehet aber diese Division nicht an, so muß man sich mit der Näherung begnügen, die erhalten wird, wenn man den Quotienten so viel mal nach einander mit dem umgekehrten Nahmen (im Fall dieser ein Bruch ist) multiplicirt, bis ein Bruch entstehet, dessen Nenner größer als der Zähler ist, weil dieser die Grenze der Anzahl Glieder von der Progression zu erkennen giebt.

Gesetzt, man fragt: wie lange müssen 10000 Thl. mit ihren Zinsen zu 4 pr. C. stehen, damit sie zu einem Capital von 11800 Thl. heranwachsen? so haben wir eigentlich eine geom. Progr., davon der Nahme $\frac{104}{100} = \frac{26}{25}$, und der Quotient der beyden äussersten Glieder $\frac{11800}{10000} = \frac{59}{50}$ ist, und wir können setzen:

Zum 1sten mal giebt $\frac{59}{50} \cdot \frac{25}{26} = \frac{1475}{1300}$

‚ 2ten ‚ ‚ $\frac{1475}{1300} \cdot \frac{25}{26} = \frac{73750}{33800}$

‚ 3ten ‚ ‚ $\frac{73750}{33800} \cdot \frac{25}{26} = \frac{911875}{878800}$

‚ 4ten ‚ ‚ $\frac{911875}{878800} \cdot \frac{25}{26} = \frac{22928875}{22848800}$

und zum 5ten mal giebt $\frac{22928875}{22848800} \cdot \frac{25}{26} = \frac{573221875}{594068800}$

Da wir nun bey diesem letzten Bruche wahrnehmen, daß der Zähler kleiner als der Nenner ist, so schließen wir, daß die 10000 Thl. sammt ihren Zinsen nicht volle 5 Jahre, sondern nur 4 Jahre und einige Monate stehen müssen, wenn sie zu 11800 Thl. heranwachsen sollen. Und suchen wir: wie groß das Capital in 4 Jahren werde, so finden wir (S. 299.) daß es zu 11761 Thl. heranwachse. Bey der Lehre von den Logarithmen werden wir leichtere Auflösungen von dergleichen Aufgaben geben.

224.

Die Summe einer geometrischen Progression finden wir durch folgendes Raisonnement. Es sey gegeben die geometrische Progression

$\div\div$ 3, 12, 48, 192, 768

deren Summe gesucht wird. Zu diesem Ende multiplicire man die Glieder dieser Progression nochmal mit den Nahmen 4; so erhält man folgende geometrische Progession

$\div\div$ 12, 48, 192, 768, 3072.

Das erste Glied dieser letztern Progression muß gleich dem zweyten Gliede der vorgegebenen Progression seyn, weil das Product ihres ersten Gliedes in

den Nahmen, das zweyte Glied giebt (§216), und folglich müssen auch alle folgende Glieder der zweyten Progression, mit den folgenden der ersten übereinstimmen, nur findet sich in der letzten Progression noch das Glied $3072 = 4.768$, welches kein ihm entsprechendes in der vorgegebenen Progression hat. Aber durch die Multiplication der Glieder mit den Nahmen 4, ist offenbar die Summe der zweyten Progression so viel mal größer wie die Summe der vorgegebenen Progression, als der Nahme anzeigt (hier 4 mal). Ziehen wir demnach die vorgegebene Progression von der zweyten ab, so bleibt

$$3072 - 3 = 4.768 - 3$$

offenbar ein Resultat worin die gesuchte Summe noch so oft enthalten seyn muß, als der Nahme weniger eins anzeigt, d. h. $(4 - 1)$ mal. Dividiren wir demnach hier mit $(4 - 1)$ in jenem Resultate so erhalten wir

$$\frac{4.768 - 3}{4 - 1}$$

als die gesuchte Summe der vorgegebenen Progression. Bemerken wir nun das hier 4 der Nahme, 768 das Letzte und 3 das erste Glied der geometrischen Progression ist, so haben wir folgende einfache Regel:

Die Summe der Glieder einer geometrischen Progression zu finden, multiplicire man das letzte Glied mit ihren Nahmen, subtrahire vom Producte das erste Glied,

und dividire die entstehende Differenz mit ihrem um 1 verminderten Nahmen.

Die Summe der geom. Progr.

$$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \; 1, 3, 9, 27, 81$$

ist also gleich

$$\frac{3 \cdot 81 - 1}{3 - 1} = \frac{243 - 1}{2} = \frac{242}{2} = 121.$$

Und von der Progression

$$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \; 1, \frac{5}{4}, \frac{25}{16}, \frac{125}{64}, \frac{625}{256}$$

ist die Summe gleich

$$\frac{\frac{5}{4} \cdot \frac{625}{256} - 1}{\frac{5}{4} - 1} = \frac{\frac{3125}{1024} - \frac{1024}{1024}}{\frac{5}{4} - \frac{4}{4}} = \frac{\frac{2101}{1024}}{\frac{1}{4}} = \frac{2101}{256}$$

$$= 8\frac{53}{256}$$

Beyspiel.

Es habe jemand 1000 Thl. zu 5 pr. C. ausgethan, um die davon nach jedem Jahre zu erhaltene Zinsen zu außerordentlichen Ausgaben anzuwenden; als sich aber noch vor Ablauf des Jahres seine Einkünfte so ansehnlich vermehrten, daß er von ihnen jährlich 200 Thl. zulegen konnte; so beschloß er diese jenem Capitale zuzulegen, und die von ihnen fallenden Zinsen ebenfalls zu 5 pr. C. stehen zu lassen; man frägt: wie stark sein Capital nach Verlauf von 4 Jahren geworden sey?

Diese Aufgabe aufzulösen schließen wir: da das Capital von 1000 Thl. mit seinen fallenden Zinsen 4 Jahre gestanden hat, so ist es am Ende dieser Zeit zu $\frac{21^4}{20^4}$. 1000 Thl. herangewachsen (S. 299.) was aber die hinzugethane 200 Thl. betrifft, so ist klar, daß der Mann

nach 1 Jahre 200 Thl.

$$\text{“ } 2 \text{ “ } \frac{21}{20} \cdot 200 \text{ Thl.} + 200 \text{ Thl.}$$

$$\text{“ } 3 \text{ “ } \frac{21^2}{20^2} \cdot 200 \text{ Thl.} + \frac{21}{20} \cdot 200 \text{ Thl.} + 200 \text{ Thl.}$$

$$4 \text{ “ } \frac{21^3}{20^3} \cdot 200 \text{ Thl.} + \frac{21^2}{20^2} \cdot 200 \text{ Thl.} + \frac{21}{20} 200 \text{ T.} + 200 \text{ Thl.}$$

zu ersterm Capital noch zu bekommen hat; mithin muß das ganze Capital nach 4 Jahren.

$$\frac{21^4}{20^4} \cdot 1000 \text{ Thl.} + \left(\frac{21^3}{20^3} \cdot 200 + \frac{21^2}{20^2} \cdot 200 + \frac{21}{20} \cdot 200 + 200 \right) \text{T.}$$

betragen.

Nun geben hier die in der Parantheſe eingeſchloſſenen Glieder eine der vorigen ähnliche Progreſſion, (wenn man ſie in umgekehrter Ordnung ſtellt) deren Exponent $\frac{21}{20}$ iſt; alſo muß wiederum ihre Summe

$$\frac{\frac{21^3}{20^3} \cdot 200 \cdot \frac{21}{20} - 200}{\frac{21}{20} - 1} = \frac{\frac{21^4}{20^4} \cdot 200 - 200}{\frac{1}{20}}$$

$$= \left(\frac{21^4}{20^4} \cdot 200 - 200 \right) \cdot 20 = \frac{21^4}{20^4} \cdot 4000 - 4000 \text{ ſeyn,}$$

und folglich das Capital

$$\frac{21^4}{20^4} \cdot 1000 \text{ Thl.} + \frac{21^4}{20^4} \cdot 4000 \text{ Thl.} - 4000 \text{ Thl.}$$

$$= \frac{21^4}{20^4} \cdot 5000 \text{ Thl.} - 4000 \text{ Thl. betragen, weil der Nahme}$$

$\frac{21^4}{20^4}$ von 1000 Thl. und 4000 Thl. ein gemeinſchaftlicher Factor iſt.

Es giebt aber $\frac{21^4}{20^4} = \frac{21 \cdot 21 \cdot 21 \cdot 21}{20 \cdot 20 \cdot 20 \cdot 20} = \frac{194487}{160000}$,

mithin $\frac{21^4}{20^4} \cdot 5000 \text{ Thl.} = \frac{194481}{160000} \cdot 5000$

$= 9\frac{2405}{100} = 6077\frac{1}{2}$ Th. und es muß $6077\frac{1}{2}$ Th. — 4000 Th. $= 2077\frac{1}{2}$ Thl. seyn.

Die Summe einer abnehmenden geometrischen Reihe, findet man eben so wie die Summe einer zunehmenden geometrischen Reihe, nur muß man ihr erstes Glied als letztes und ihr letztes Glied als erstes ansehen, bey dieser umgekehrten Reihe, ist aber auch der Nahme der umgekehrte Bruch des Nahmens der vorgegebenen Reihe

Z. B. bey der Reihe $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16}, \frac{1}{32}, \frac{1}{64}, \frac{1}{128}$, ist 1 das erste Glied, $\frac{1}{128}$ das letzte und $\frac{1}{2}$ der Nahme

kehrt man aber diese Reihe um, so ist bey

$$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ \frac{1}{128}, \frac{1}{64}, \frac{1}{32}, \frac{1}{16}, \frac{1}{8}, \frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 1$$

das erste Glied $\frac{1}{128}$, das letzte 1 und $\frac{2}{1} = 2$ der Nahme.

Nun ist die Summe dieser letztern Reihe nach §. 224. gleich

$$\frac{1 \cdot 2 - \frac{1}{128}}{2 - 1} = 2 - \frac{1}{128} = 1\frac{127}{128}$$

Bey dieser Summe bemerkt man, daß das Product 1. 2 nemlich des letzten Gliedes in den Nahmen, so wie auch der Divisor $2 - 1 = 1$ beständig ist, und das von jeder beliebigen Anzahl von Gliedern, die Summe immer seyn wird

2 — dem ersten Gliede

je mehr Glieder man aber von einer solchen Reihe nimmt, wo 1 immer das letzte Glied und 2 der Nahme ist, je kleiner wird das erste Glied, und je weniger wird die zu findende Summe von 2 abweichen; die Zahl der Glieder einer solchen Reihe mag aber noch so groß sein, so ist dennoch ihre Summe immer kleiner als 2. Man nennt daher 2 die Gren-

ze der Summe dieser Reihe, weil sie zwar der 2 immer näher kommen kann, aber sie nie zu erreichen geschweige zu übertreffen vermag. Die vorhin gefundene Summe $\frac{1 \cdot 2 - 1\frac{1}{128}}{2 - 1}$ kann man oben und unten mit den Nahmen 2 dividiren, so erhält man

$$\frac{1 - 1\frac{1}{128} \cdot 2}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1 - 1\frac{1}{128} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} - \frac{1\frac{1}{128} \cdot \frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}}$$

Hier ist aber 1 das erste Glied der vorgegebenen Reihe $1\frac{1}{128}$ das letzte Glied und $\frac{1}{2}$ der Nahme, hiernach würde also die Summe einer vorgegebenen abnehmenden geometrischen Reihe gefuden, wenn man das erste Glied mit 1 weniger den Nahmen dividirt und davon das Product des letzten Gliedes in den Nahmen und dividirt durch 1 weniger den Nahmen, abzieht.

Es sey z. B. die Summe von 0, 99999
$= 1\frac{9}{10}, 1\frac{99}{100}, 1\frac{999}{1000}, 1\frac{9999}{10000}, 1\frac{99999}{100000}$ zu finden.

Kehrt man die Reihe um, so hat man
$\frac{..}{..} 1\frac{99999}{100000}, 1\frac{9999}{10000}, 1\frac{999}{1000}, 1\frac{99}{100}, 1\frac{9}{10}$

Die Summe dieser letzten Reihe ist

$$\frac{1\frac{9}{10} \cdot 10 - 1\frac{99999}{100000}}{10 - 1} = \frac{1\frac{9}{10} - 1\frac{99999}{100000} \cdot \frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}}$$

$$= \frac{1\frac{9}{10}}{1 - \frac{1}{10}} - \frac{1\frac{99999}{100000} \cdot \frac{1}{10}}{1 - \frac{1}{10}} = 1 - 1\frac{1}{100000}$$

225.

Die Summe der Reihe 0, 99999 . . . .

nähert sich also auch immer mehr der 1 ohne solche je zu erreichen, noch weniger zu übertreffen, also ist 1

die Grenze der Summe für diese Reihe. Diese Grenzen kennen wir für jede beliebige abnehmende geometrische Reihe angeben, denn da wir oben gefunden haben daß ihre Summe allgemein durch

$$\frac{\text{Erstes Glied}}{1 - \text{den Nahmen}} - \frac{\text{letztes Glied mal den Nahmen}}{1 - \text{den Nahmen}}$$

gegeben ist, so wird man leicht gewahr, daß, wenn das erste Glied und der Nahme einer abnehmenden geom. Prog. einerley bleibt, auch der Ausdruck;

$$\frac{\text{Erstes Glied}}{1 - \text{den Nahmen}}$$

eine beständige Größe ist; hingegen hängt der Ausdruck:

$$\frac{\text{letztes Glied mal den Nahmen}}{1 - \text{den Nahmen}}$$

von dem letzten Gliede ab, und da dieses von der Anzahl der Glieder abhängt, und immer kleiner wird, je mehr man deren nimmt, so daß nach der Natur der geometrischen Reihe das letzte Glied kleiner werden kann als jede Größe die sich angeben läßt, so wird auch jener zweyte Ausdruck kleiner als jede gegebene endliche Größe werden können, daher die Summe einer abnehmenden geometrischen Progression von dem erstem Ausdrucke weniger unterschieden seyn kann als jede Größe die sich angeben läßt, folglich ist die gesuchte Grenze der Summe einer jeden abnehmenden geometrischen Reihe ganz allgemein

$$= \frac{\text{Erstes Glied}}{1 - \text{den Nahmen}}$$

Z. B. die Grenze der Summe von

$$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{6},\ \frac{1}{12},\ \frac{1}{24},\ \frac{1}{48},\ \cdots\cdots$$

ist gleich $\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{2}} = \frac{2}{3}$

Von $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ \frac{1}{10},\ \frac{1}{100},\ \frac{1}{1000},\ \frac{1}{10000},\ \cdots$

$= 0,\ 11111\ \ldots\ldots$

ist die Grenze der Summe gleich

$$\frac{\frac{1}{10}}{1-\frac{1}{10}} = \frac{\frac{1}{10}}{\frac{9}{10}} = \frac{1}{9}.$$

Von $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ \frac{1}{11},\ \frac{1}{33},\ \frac{1}{99},\ \frac{1}{297},\ \cdot$

ist die Grenze der Summe gleich

$$\frac{\frac{1}{11}}{1-\frac{1}{3}} = \frac{\frac{1}{11}}{\frac{2}{3}} = \frac{3}{22}.$$

Von $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ 48,\ 12,\ 3,\ \frac{3}{4},\ \frac{3}{16},\ \cdot\ \cdot\ \cdot$

ist die Grenze der Summe gleich

$$\frac{48}{1-\frac{1}{4}} = \frac{48}{\frac{3}{4}} = \frac{48\cdot 4}{3} = 16\cdot 4 = 64.$$

Von $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ 6,\ 4,\ \frac{8}{3},\ \frac{16}{9},\ \frac{32}{27},\ \frac{64}{81},\ \ldots\ldots$

ist die Grenze der Summe gleich

$$\frac{6}{1-\frac{2}{3}} = \frac{6}{\frac{1}{3}} = 18.$$

Von $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}\ \frac{6}{7},\ \frac{6^2}{7^2},\ \frac{6^3}{7^3},\ \frac{6^4}{7^4}\ \cdot\ \ldots\ldots$

ist die Grenze der Summe gleich

$$\frac{\frac{6}{7}}{1-\frac{6}{7}} = \frac{\frac{6}{7}}{\frac{1}{7}} = 6.$$

226.

Diese Methode, die Grenze der Summe abnehmender geometrischen Reihen zu bestimmen, kann man mit Leibnitz auf die Berechnung des Interurii anwenden.

Es sey mir z. B. A nach Verlauf eines Jahres ein gewisses Capital schuldig, welches hier $= 1$ gesetzt werden kann: Bezahlt er mir das Capital gleich jetzo baar, so bin ich ihm am Ende des Jahres, wenn 5 Prozent gerechnet werden, $\frac{1}{20}$ an Zinsen schuldig, weil er diese damit hätte gewinnen können. Rechnet nun A gleich $\frac{1}{20}$ ab, und bezahlt mir $1 - \frac{1}{20}$; so ist es so viel, als ob ich gleich jetzt ein Capital bezahle das ich erst am Ende des Jahres schuldig bin: Daher muß mir A am Ende des Jahes $\frac{1}{20.20} = \frac{1}{400}$ bezahlen. Giebt er mir dies gleich jetzo, so daß ich $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400}$ erhalte: So anticipirt er die Bezahlung von $\frac{1}{400}$, und ich bin gehalten, am Ende des Jahrs ihm $\frac{1}{20} \cdot \frac{1}{400} = \frac{1}{8000}$ an Zinsen zu bezahlen. Rechnet A diese gleich jetzt ab, und giebt mir $1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} - \frac{1}{8000}$ so anticipire ich die Bezahlung. Dies geht ohne Aufhören fort: Also ist das, was ich gleich jetzt mit Recht fordern kann, die Grenze der Summe der ohne Ende fortgehenden Reihe

$$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} 1 - \frac{1}{20} + \frac{1}{400} + \frac{1}{8000} + \frac{1}{160000} - \frac{1}{3200000} + \cdot\cdot\cdot\cdot$$

weil A von dem, was er mir giebt, allemal wieder $\frac{1}{20}$

abrechnen, und ich dagegen von den abgerechneten wieder $\frac{1}{20}$ fordern kann.

Um nun die Grenze der Summe der obigen Reihe zu finden, so muß man die Grenze der Summe der positiven, und die Grenze der Summe der negativen Glieder, jede für sich suchen, und die letzte von der ersten abziehen

Die positiven Glieder machen folgende Reihe

$$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} 1 + \frac{1}{400} + \frac{1}{160000} + \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

wo der Nahme $\frac{1}{400}$ ist; daher die Grenze der Summe gleich

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{400}} = \frac{1}{\frac{399}{400}} = \frac{400}{399}$$

Die negativen Glieder geben folgende Reihe

$$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot} \frac{1}{20}, \frac{1}{8000}, \frac{1}{3200000} \cdot\cdot\cdot\cdot\cdot\cdot$$

wo auch der Nahme $\frac{1}{400}$ ist, und mithin die Grenze der Summe gleich

$$\frac{\frac{1}{20}}{1 - \frac{1}{400}} = \frac{\frac{1}{20}}{\frac{399}{400}} = \frac{1}{20} \cdot \frac{400}{399} = \frac{20}{399}$$

Folglich die gesuchte Grenze der Summe gleich

$$\frac{400}{399} - \frac{20}{399} = \frac{380}{399} = \frac{19 \cdot 20}{19 \cdot 21} = \frac{20}{21}$$

und dieses ist das wirklich zu zahlende Capital, daher $1 - \frac{20}{21} = \frac{1}{21}$ der Rabatt (Abzug). Das eben gesagte soll nur zeigen daß man bey Gegenständen, wo man es auf den ersten Anblick nicht vermuthet, auf dergleichen Reihen stößt, sonst findet man freylich diese Resultate schneller so: wenn aus 100 Thlr in 1 Jahr 105 Thlr werden, so sind

105 nach Verlauf eines Jahres fällige Thaler jetzt 100 Thlr werth. d. h 21 erst in einem Jahre zahlbare Thaler sind jetzo 20 Thlr werth; hiernach ist also ein Thaler gegenwärtig werth $\frac{20}{21}$ Thl.

Von den Logarithmen.

226.

Die Logarithmen sind Zahlen in arithmetischer Progression, die Glied für Glied einer eben solchen Reihe von Zahlen in geometrischer Progression entsprechend.

Wenn man z. B. folgende geometrische und arithmetische Progression hat,

$\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256 . . . . .

$\frac{\cdot}{\cdot}$ 3, 5, 7, 9, 11, 13, 15, 17 . . . . .

so sagt man, daß jedes Glied der untern Reihe der Logarithmus desjenigen Gliedes ist, welches in der obern Reihe an derselben Stelle steht. 9 wäre also hier der Logarithmus von 16, und 17 wäre der Logarithmus von 256.

227.

Eine und eben dieselbe Zahl kann also eine unendliche Anzahl von verschiedenen Logarithmen haben, weil man zu der nemlichen geometrischen Progression eine unendliche Anzahl von verschiedenen arithmetischen Progressionen correspondiren lassen kann.

Da man hier die Logarithmen nur in Beziehung des Gebrauchs den man davon in den numerischen Calcul machen kann, betrachtet, so hält man sich dabey nicht auf, die verschiedenen geometrischen und arithmetischen Progressionen zu betrachten, welche man unter sich vergleichen könnte; Wir gehen so fort zu der

jenigen über, welche man bey der Bildung der Logarithmischen Tafeln betrachtet hat.

228.

Man hat zur geometrischen Progression die zehnfache Progression gewählt, und zur arithmetischen Progression die Reihe der natürlichen Zahlen; d. h. man hat folgende zwey Progressionen gewählt.

∴ 1, 10, 100, 1000, 10000, 100000, 1000000 . . . . .
∴ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, ...

Es wird also immer leicht zu erkennen seyn welches der Logarithmus von einer durch eine Eins mit so viel Nullen als man will ausgedrückten Zahl ist; er hat allezeit so viel Einheiten als Nullen bey dieser Eins sind,

Z. B. der Logarithmus von 1000 ist 3, und der Logarithmus von 100000 ist 5.

229.

Was die Logarithmen der zwischen den Gliedern der zehnfachen Progression liegenden Zahlen anbetrift, so wird man auf folgende Art zu ihrer Bestimmung gelangen, wenn man keine andere Hülfsmittel als diejenigen hat, welche die Arithmetik allein geben kann.

230.

Der gegebenen Erklärung der Logarithmen zufolge, sieht man, daß, um den Logarithmus einer beliebigen Zahl zu haben, z. B. von 3, so muß diese Zahl ein Theil der geometrischen Fundamental Progression ausmachen können. Ob man nun gleich nicht sieht, daß 3 ein Theil der geometrischen Progres-

sion $\frac{\cdot\cdot}{\cdot\cdot}$ 1, 10, 100, . . . , ausmachen könnte, so sieht man dem ohngeachtet, daß, wenn man zwischen 1 und 10 eine große Anzahl von mittlern geometrischen Glieder einschaltet (§199), man alsdann von 1 zu 10 durch um so engere Grade steigen würde als die Anzahl dieser mittlern größer wäre, und demnach von zwey Dingen eins geschiehet, entweder daß eine dieser mittlern genau der Zahl 3 gleich gefunden wird, oder sich darin wenigstens zwey aufeinander folgende mittlere finden, zwischen welchen die Zahl 3 enthalten würde, und wovon jede um so weniger von 3 unterschieden wäre, als die Anzahl der eingeschalteten mittlern Glieder größer wäre.

Dieses festgesetzt, wenn man zwischen 0 und 1 so viel mittlere arithmetische einschaltete, als man zwischen 1 und 10 mittlere geometrische eingeschaltet hat, und jedes Glied der geometrischen Progression zum Logarithmus das correspondirende Glied der arithmetischen Progression hat, so wird man in dieser letzten für den Logarithmus von $\frac{3}{4}$ diejenige Zahl nehmen die sich an eben der Stelle befindet, wo 3 in der geometrischen Progression sich findet; oder wenn 3 nicht ganz genau eines der Glieder von dieser Progression wäre, so nehme man in der arithmetischen Progression, dasjenige Glied, welches sich in der geometrischen an meisten der Zahl 3 näherte.

So könnte man in der That verfahren, wenn man keine andere Hülfsmittel hätte, als die, welche die Arithmetik darbietet. Wie dem auch sey, so läuft hierauf die Berechnung der Logarithmen hinaus.

131.

Man muß sich also vorstellen, daß, man 10000000 mittlere geometrische zwischen 1 und 10, eben solche Anzahl zwischen 10 und 100, eben solche Anzahl zwischen 100 und 1000, u. s. w. eingeschaltet hat, und ferner auch eben solche Anzahl mittlere arithmetische zwischen 0 und 1 eben solche Anzahl zwischen 1 und 2, eben solche Anzahl zwischen 2 und 3 u. s. w. eingeschaltet hat. Nachdem man nun alle mittlere geometrische Glieder in einer Linie nach ihrer Ordnung und darunter alle mittlere arithmetische Glieder nach ihrer Ordnung geschrieben hat, so hat man in der obern Reihe die der Zahl 3 am nächsten kommende Zahl gesucht, und hat dazu in der untern Reihe die entsprechende Zahl genommen; man hat eben so in der obern Reihe, die der Zahl 2 am nächsten kommende Zahl, und in der untern Reihe dazu die entsprechende Zahl genommen; dieses ist eben so successive für die Zahlen 4, 5, 6, ... geschehen, endlich nachdem man die Zahlen 1, 2, 3, 4, 5, ... in einer Columme gebracht hat, (wie man solches hinten bey den Logarithmischen Tafeln sieht), und in einer Columme zur Seite, die Glieder der arithmetischen Progression die man jenen correspondirend gefunden, oder zum wenigsten die davon jenen am nächsten kamen); geschrieben hat, so wird man alsdann eine Idee von der Bildung der Logarithmen und von ihrer Anordnung in den gewöhnlichen Tafeln haben.

232.

Wir wollen im Betreff der Logarithmischen Tafeln noch bemerken, daß die erste Ziffer eines jeden Logarithmen die Caracteristick, Kennziffer des Logarithmen heißt, weil man durch diese Ziffer sogleich beurtheilen kann in welcher Decade die Zahl, zu welcher der Logarithmen gehört, sich befindet. Z. B. Wenn ein Logarithmus 3 zur Caracteristick hat, so weiß man daß die dazu gehörige Zahl zu den einziffrigen Tausenden gehört, denn da 3 der Logarithmus von 1000, und 4 der Logarithmus von 10000 ist, so kann jede Zahl von 1000 bis 10000, nur 3 nebst einem Decimalbruch zum Logarithmen haben. Den Decimalbruch des Logarithmen nennt man Mantissa.

Zu einer fünfziffrigten ganzen Zahl gehört also ein Logarithmus dessen Caracteristik 4 ist, zu einer siebenziffrigten ganzen Zahl, gehört ein Logarithmus dessen Caracteristik 6 ist, und umgekehrt, zu den Logarithmus mit der Caracteristik 9 gehört eine 8ziffrige ganze Zahl, und zu dem Logarithmus mit der Caracteristik 11 gehört eine 10ziffrigte ganze Zahl.

Eigenschaften der Logarithmen.

233.

Die Eigenschaften der Logarithmen, wovon wir sogleich reden werden, sind meisten Theils demjenigen logarithmischen System oder der geometrischen Fundamental-Progression, die mit der Einheit, und der arithmetischen Progression die mit o anfängt, eigen. Den Gebrauch den wir daraus folgern würde nicht derselbe seyn, wenn die beyden Progressionen,

oder bloß eine von beyden anders anfienge; aber die Betrachtung der letztern gehört nicht zu unsern Vorwurfe.

243.

Laßt uns also, von einer beliebigen geometrischen Progression, deren erstes Glied aber die Einheit sey, Glied vor Glied, mit einer beliebigen arithmetischen vergleichen, deren erstes Glied aber Null sey,

Z. B. die folgende zwey Progressionen

∴ 1, 3, 9, 27, 81, 243, 729, 2187, 6561, . . .

∴ 0, 4, 8, 12, 16, 20, 24, 28, 32, ...

Es folgt aus der Natur und der vollkommenen Uebereinstimmung dieser beyden Progressionen, daß so viel mal der Nahme der ersten Progression hat Factor seyn müssen, um ein beliebiges Glied von dieser Progression zu bilden, so vielmal hat müssen der Nahme der zweyten Progression zu sich selbst addirt werden um das correspondirende Glied von dieser zweyten Progression zu bilden.

Z. B. in dem Gliede 2187 ist der Nahme 3, siebenmal Factor, d. h. $2187 = 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^7$, und in dem Gliede 28, ist der Nahme 4, siebenmal enthalten, d. h. $28 = 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 + 4 = 7 \cdot 4$.

In der That, nachdem was (§ 190 und 196) gesagt ist, ist in einem beliebigen Gliede der ersten Progression der Nahme so viel mal Factor als Glieder vor jenem Gliede sind; und in der zweyten Progression, ist ein beliebiges Glied so vielmal aus den Nahmen zusammengesetzt, als Glieder vor ihm sind. Es sind aber bey

jener und bey dieser Progression dieselbe Anzahl Glieder; also u. s. w.

Hieraus schließen wir daß ein beliebiges Glied von der geometrischen Progression, immer in der arithmetischen Progression ein correspondirendes Glied haben wird, welches den Nahmen von dieser Progression so vielmal enthält, als soviel der Nahme der andern Progression Factor in diesem Gliede der geometrischen Progression ist.

235.

Wenn man also zwey Glieder von der geometrischen Progression eins durch das andere multiplicirt, und man zu gleicher Zeit die zwey correspondirenden Glieder von der arithmetischer Progression zusammen addirt, so werden, das Product und die Summe zwey sich correspondirenden Glieder in diesen Progressionen seyn.

Denn das Product wird aus so vielmal den Nahmen als Factor gebildet seyn, als so viel mal solcher sowohl in dem einen als in dem andern zusammen multiplicirten Glieder ist; und die Summe von den beyden addirten Gliedern, wird aus so viel mal den Nahmen der arithmetischen Progression zu sich selbst addirt gebildet seyn, als so viel mal solcher sowohl in dem einen als in dem andern Gliede addirt ist; mithin da man in beyden Progressionen correspondirende Glieder genommen hat, so wird der Nahme der geometrischen Progression in dem Producte eben so

vielmal Factor seyn, als soviel mal der Nahme der arithmetischen Progression in der Summe zu sich selbst addirt ist; folglich werden sich das Product und die Summe correspondiren.

236.

Man kann daher, durch die bloße Addition der beyden Glieder von der arithmetischen Progression, das Product der beyden in der geometrischen Progresson correspondirenden Glieder kennen in dem man diese zwey Progressionen genugsam verlängert voraussetzt.

Z. B., indem man die beyden Glieder 8 und 24 zusammenaddirt die zu 9 und 729 gehören, so hat man 32 welches Glied dem Gliede 6561 entspricht; Hieraus schließt man daß das Product von 726 durch 9, 6561 ist, welches sich wirklich so findet.

237.

Weil nun die natürlichen Zahlen, welche in den Logarithmischen Tafeln die erste Columme ausmachen, aus einer mit der Einheit anfangenden geometrischen Progression gezogen sind, und weil ihre Logarithmen die von einer mit o anfangenden arithmetischen Progression correspondirende Glieder sind; so muß man daraus schließen, daß, wenn man die Logarithmen von zwey Zahlen addirt, man den Logarithmus von ihrem Producte hat.

Gebrauch der Logarithmen.

238.

Um eine Multiplication zweyer Zahlen vermittelst der Logarithmen zu machen, so muß man zu den Logarithmus des Multiplicandus, den Logatithmus des Multiplicators addiren, die Summe wird der Logarithmus des Products seyn; sucht man daher diese Summe unter den Logarithmen in den Tafeln, so wird man darneben zur Seite das Product finden.

Z. B. Wenn man 14 mit 13 multipliciren soll so findet man in den Tafeln daß der Logarithmus

von 14 ist	1, 146128 *)
und der Logarithmus von 13 ist . .	1, 113943
Die Summe	2, 260071

gehört in den Tafeln zu der Zahl 182, welche wirklich das gesuchte Product ist. Der lg. 73 . 87 = lg. 73 + lg. 87; der lg. 183 . 579 . 17 = lg. 183 + lg. 579 + lg. 17.

239.

Um eine Zahl zu quadriren, ist es also hinlänglich ihren Logarithmus zu Dubliren, weil man diesen Logarithmus zu sich selbst addiren müßte, um die Zahl mit sich selbst zu multipliciren.

*) Da 6 Decimalstellen hier hinreichend sind, so ist die 7te Decimalstelle, welche sich noch in den Tafeln findet, bey mehreren Beyspielen nicht abgeschrieben.

Z. B. der Logarithmus von 17^2 ist gleich 2 mal den Logarithmus von 17 oder lg. $17^2 = 2$. lg. 17.; und lg. $39^2 = 2$. lg. 39.

240.

Aus einer ähnlichen Ursache, muß man, um eine Zahl zu cubiren, ihren Logarithmus trippliren: und überhaupt, um eine Zahl zu einer beliebigen Potenz zu erheben, so muß man ihren Logarithmus so viel mal nehmen als der Exponent der diese Potenz anzeigt Einheiten hat; d. h., ihren Logarithmus mit dem Exponenten der diese Potenz anzeigt multipliciren.

Z. B. um eine Zahl zur 7ten Potenz zu erheben, müßte man den Logarithmus dieser Zahl mit 7 multipliciren. Demnach ist der lg. $41^9 = 9$. lg. 41; und der lg. $753^{17} = 17$ lg. 753.

241.

Um also die Quadratwurzel, Cubicwurzel vierte Wurzel, u. s. w. aus einer vorgegebenen Zahl zu ziehen, so müßte man den Logarithmus dieser Zahl dividiren durch 2, 3, 4, . . ., d. h. überhaupt durch die Zahl welche den Grad der auszuziehenden Wurzel anzeigt.

Z. B. Wenn man die Quadratwurzel von 144 verlangt, so sucht man in den Tafeln den Logarithmus von dieser Zahl, dieser ist 2,158362, davon nimmt man die Hälfte 1,079181; nun sucht man in den Tafeln die Stelle, wo sich 1,079181 findet; darneben findet sich die Zahl 12, die folglich die Quadratwurzel von 144 ist. Denn man verlangt ja eine Zahl zu finden, deren Logarithmus doppelt genommen gleich den Logarithmus von 144 ist, folglich ist der Log. der gesuchten Zahl die Hälfte des Logarithmus von 144.

Wenn man die 7te Wurzel von 128 verlangt, so sucht

man in den Tafeln den Logarithmus von 128, dieser findet sich = 2, 107210; davon nimmt man den 7ten Theil, oder man dividirt mit 7, und sucht in den Tafeln zu welcher Zahl der Quotient 0, 301030 gehört; man findet daß er der Logarithmus von 2 ist, welche wirklich die 7te Wurzel von 128 ist. Denn man verlangt eigentlich eine Zahl zu finden deren Logarithmus 7mal genommen den Logarithmus von 128 gleich ist, folglich ist der Logarithmus der gesuchten Zahl gleich den 7ten Theil des Logarithmus von 128.

Der $\lg. \sqrt[2]{7} = \frac{\lg. 7}{2}$; $\lg. \sqrt[3]{13} = \frac{\lg. 13}{3}$; $\lg. \sqrt[5]{73}$ $= \frac{\lg. 73}{5}$.

242.

Um den Quotienten von der Division einer Zahl durch eine andere zu finden, muß man den Logarithmus des Divisors, von dem Logarithmus des Dividendus abziehen, und den übrig bleibenden Logarithmus in den Tafeln aufsuchen, und sehen welcher Zahl er entspricht; diese Zahl ist der gesuchte Quotient.

Z. B. Wenn man 187 durch 17 dividiren will, so sucht man in den Tafeln, die Logarithmen dieser zwey Zahlen, und findet . . .

Der Logarithmus von 187	2, 271842
" " " " 17	1, 230449
Die Differenz	1, 041393

entspricht in den Tafeln der Zahl 11 die in der That der gesuchte Quotient ist.

Der $\lg. 17\frac{28}{48} = \lg. 1728 - \lg. 48$; der $\lg. \frac{97}{17} = \lg. 97 - \lg. 17$.

Wenn die Division nicht ganz genau geschehen

kann, so wird der bleibende Logarithmus sich nur zum Theil in den Tafeln finden; wir werden nach diesem sogleich lehren, was man in diesem Falle machen muß.

Der Beweis dieser Regel gründet sich darauf, daß der Quotient durch den Divisor multiplicirt den Dividendus wieder hervor bringen muß (§. 68). der Logarithmus des Quotienten zum Logarithmus des Divisors addirt, muß also den Logarithmus des Dividendus ausmachen, und folglich ist der Logarithmus des Quotienten gleich dem Log. des Dividendus, weniger den Log. des Divisors.

Der lg. $\frac{37}{19}$ = lg. 37 — lg. 19; den der lg. $\frac{37}{19}$. 19 = lg. $\frac{37}{19}$ + lg. 19 muß = lg. 37 seyn; folglich der lg. $\frac{37}{19}$ + lg. 19 — lg. 19 = lg. 37 — lg. 19 = lg. $\frac{37}{19}$.

243.

Nachdem was wir so eben gesagt haben, ist es sehr leicht zu sehen, daß man, um eine Regel Detri durch Logarithmen zu machen, den Log. des zweyten Gliedes, zu dem Log. des 3ten Gliedes addiren und von dieser Summe den Log. des ersten Gliedes abziehen muß.

Z. B. $7 : 63 = 13 : x$ so ist $x = \frac{63 \cdot 13}{7}$

also $\lg. x = \lg. \frac{63 \cdot 13}{7} = \lg. (63 \cdot 13) - \lg. 7$
$= \lg. 63 + \lg. 13 - \lg. 7.$

244.

Wir wollen ferner bemerken daß wenn man in dem gewöhnlichen Tafeln einen Logarithmus aufsucht, der aus den

Operationen mit andern Logarithmen hervorgegangen ist; so soll man, wenn die Differenz nur eine Einheit zwischen der letzten Ziffer dieses Log. und den der Tafel ist, diese Differenz als Null ansehen, weil die Logarithmen aller zwischen Zahlen von der zehnfachen Progression, nur etwa um eine halbe Einheit der 7ten Decimalstelle genähert sind.

Von den Zahlen, deren Logarithmen sich nicht in den Tafeln finden.

245.

Die Brüche und die ganze Zahlen mit Brüche haben ihre Logarithmen nicht in den Tafeln; es verhält sich eben so mit den Quadrat, Cubicwurzeln u. s. w. der Zahlen die keine vollkommene Potenzen von dem Grade dieser Wurzeln sind.

Verlangt man den Logarithmus von einer ganzen Zahl mit einem Bruche, so muß man zuerst in Ganzen in einem Bruch reduciren, und nachgehends den Logarithmus des Nenners, von den Logarithmus des neuen Zählers abziehen.

Z. B. um den Logarithmus von $8\frac{3}{11}$ zu haben, sucht man den von $\frac{91}{11}$, welchen man findet, indem man den Logarithmus von 11 = 1,041393, von 1,959041 = Logarithmus von 91 abzieht; der Rest 0,917648 ist der Logarithmus von $8\frac{3}{11}$, weil $8\frac{3}{11}$ oder $\frac{91}{11}$, nichts anders ist als 98 durch 11 dividirt, (§. 90.).

246.

Wenn der den Ganzen begleitende Bruch ein Decimalbruch wäre, so würde sich die Operation darauf reduciren, den Logarithmus zu suchen, ohne die mindeste Rücksicht auf das Decimalzeichen zu nehmen, und von der Kennziffer dieses Logarithmus, so viel Einheiten als Decimalstellen in der vorgegebenen Zahl sind, abzuziehen.

Z. B. Verlangt man den Logarithmus von 1,53, so nimmt man den Logarithmus von 153 welcher 2,184691 ist; da aber dieser Logarithmus zu einer 100 mal größern Zahl, als 1,53 gehört, so zieht man von seiner Kennziffer 2 Einheiten ab, die der Logarithmus von 100 sind, welches (§. 243.) die Division mit 100 entspricht, und man hat 0,184691 als Logarithmus von 1,53.

247.

Dieselben Gründe beweisen, daß, um den Logarithmus eines Bruchs zu haben, muß man ebenfalls den Logarithmus des Nenners von dem Logarithmus des Zählers abziehen; da aber diese Subtraction nicht angeht, weil der Logarithmus des Nenners größer, als der Logarithmus des Zählers seyn wird, so zieht man im Gegentheile den Logarithmus des Zählers, von den Logarithmus des Nenners ab; der Rest, welcher anzeigt, wie viel man wenigstens haben muß, damit die Subtraction geschehen kann, ist der Logarithmus des Bruchs, indem man diesen Rest ein Zeichen giebt das anzeigt, daß die Subtraction eigentlich nicht hat geschehen können. Dieses Zeichen ist folgendes —, welches man minus ausspricht. Also der Logarithmus von dem Bruch $\frac{1}{91}$ wird — 0,917648 seyn.

Die linker Hand mit dem Zeichen — behafteten Zahlen nennt man negativ. In der Algebra werden wir sie näher kennen lernen: unterdessen prevenıren wir, daß man davon eine sehr falsche Idee hat, wenn man sie als Zahlen die unter Null sind, ansieht.

248.

Dieses Zeichen dient in dem Calcul daran zu erinnern, daß die Logarithmen der Brüche, der von uns für die Logarithmen der ganzen Zahlen, oder der ganzen Zahlen mit Brüchen vorgeschriebenen Regel, entgegengesetzt angewendet werden müssen; d. h. wenn man mit einem Bruch multiplicirt hat, so muß man den Logarithmus dieses Bruchs abziehen; hat man im Gegentheile mit einem Bruche zu dividiren, so muß man seinen Logarithmus addiren.

Die Ursache daran ist, für die Multiplication, daß durch einen Bruch zu multipliciren, darauf hinausläuft, mit dem Zähler zu multipliciren und nachgehends mit dem Nenner zu dividiren; also, wenn man mit Logarithmen opperirt, so muß man den Logarithmus des Zählers addiren, und nachgehends den Logarithmus des Nenners abziehen, oder welches auf eins hinausläuft, man soll nur den Ueberschuß des Logarithmus vom Nenner über den Logarithmus vom Zähler abziehen: aber dieser Ueberschuß ist vollkommen genau der Logarithmus des Bruchs.

In Betreff der Division, ist davon die Ursache auch leicht zu fassen; in der That, z. B. mit $\frac{3}{4}$ zu dividiren, läuft daraus hinaus (§. 101.) mit $\frac{4}{3}$ zu multipliciren, daher, wenn man mit Logarithmen rechnet, so muß man den Logarithmus von $\frac{4}{3}$ addiren; d. h.,

die Differenz des Logarithmus von 4, und des Logarithmus von 3, oder des Logarithmus von Nenner des vorgegebenen Bruchs und des Logarithmus seines Zählers.

249.

Wenn der Bruch, von welchem man den Logarithmus haben will, ein Decimalbruch wäre, so reducirte sich die Frage darauf, den Logarithmus so zu suchen, als wenn der vorgegebene Decimalbruch kein Komma hätte, und hat man diesen Logarithmus, von so viel Einheiten als Decimalstellen sind, abgezogen, so schreibt man vor dem Reste das Zeichen —.

Z. B. Um den Logarithmus von 0,03 zu haben, sucht man den von 3, welcher 0,477121 ist; diesen Logarithmus zieht man von 2 ab, und giebt den Rest das Vorzeichen —, so hat man — 1,522879 für den Logarithmus von 0,03.

250.

Es kann geschehen, und geschiehet oft, daß wenn man das Ganze und den Bruch wovon man den Logarithmus sucht, in einen bloßen Bruch verwandelt, so kann es kommen, sage ich, daß der Zähler eine Zahl sey, welche die Grenzen der Tafeln übersteigt.

Z. B. Wenn man den Logarithmus von $53\frac{821}{5704}$ verlangte, so giebt diese Zahl zu einem Bruche reducirt, $\frac{302173}{5704}$, wovon der Zähler die Grenzen der ausgedehntesten Tafeln übersteigt.

Es ist also dienlich zu wissen, wie man allgemein den Logarithmus von einer diesen Grenzen übersteigenden Zahl finden kann.

Die Methode, welche wir sofort geben werden, ist

nicht scharf, sie ist aber für den gewöhnlichen Gebrauch mehr als hinreichend. Ehe wir solche vortragen, wollen wir bemerken:

251.

1°) Indem man 1, 2, 3, u. s. w. Einheiten zu der Caracteristik des Logarithmus einer Zahl addirt, so multiplicirt man diese Zahl durch 10, 100, 1000, u. s. w. weil dieses so viel ist, als wenn man den Logarithmus von 10, oder von 100, oder von 1000, u. s. w. addirt (§. 228. und 238.)

2°) Im Gegentheile, wenn man 1, 2, 3, u. s. w. Einheiten von der Caracteristik eines Logarithmus abzieht, so ist dieses so viel als, wenn man die correspondirende Zahl durch 10, 100, 1000, u. s. w. dividirt.

Z. B.

wenn der lg. 37 = 1,5682017
so ist lg. 370 = 2,5682017 = lg. 37 + lg. 10
lg. 3700 = 3,5682017 = lg. 37 + lg. 100
u. s. w.

Ferner, wenn der
lg. 7,569 = 0,8790385
so ist lg. 75,69 = 1,8790385 = lg. [7,569 . 10]
= lg. 7,569 + lg. 10
lg. 756,90 = 2,8790385 = lg. [7,569 . 10]
= lg. 7,569 + lg. 100
lg. 7569 = 3,8790385 = lg. [7,569 . 1000]
= lg. 7,569 + lg. 1000
u. s. w.

Umgekehrt

wenn lg. 47000 = 4,6627578
so ist $\frac{1}{1}$lg. 4700 = 3,6627578 = lg. $\frac{47000}{10}$
= lg. 47000 — lg. 10
lg. 470 = 2,6627578 = lg. $\frac{47000}{100}$
= lg. 74000 — lg. 100
lg. 47 = 1,6627578 = lg. $\frac{47000}{1000}$
= lg. 74000 — lg. 1000. u. s. w.

Ferner, wenn der

lg. 9753 = 3,9891382
so ist lg. 975,3 = 2,9891382 = lg. $(\frac{9753}{10})$
= lg. 9753 — lg. 10
lg. 97,53 = 1,9891382 = lg. $(\frac{9753}{100})$
= lg. 9753 — lg. 100
lg. 9,753 = 0,9891382 = lg. $(\frac{9753}{1000})$
= lg. 9753 — lg. 1000. u. s. w.

252.

Dieses festgesetzt, so sey z. B. die Frage den Logarithmus von 357859 zu finden.

Man setzt bey der Beantwortung dieser Frage voraus daß man wenigstens Tafeln in Händen habe, die bis 10000 gehen.

Zur rechten der vorgegebenen Zahl, schneide man durch ein Komma so viel Ziffern ab, als nöthig ist, damit der Rest in den Tafeln gefunden werden könnte. Wir wollen hier zwey Ziffern abschneiden, wir erhalten dadurch 3578, 59, die 100mal kleiner als die vorgegebene Zahl 357859 ist.

Man sucht in den Tafeln den Logarithmus von 3578, den man gleich 3, 5536403 findet, zu gleicher Zeit nimmt man die Differenz 1214*), zwischen denselben Logarithmus und den von 3579, und macht nach diesem folgende Regel Detri.

Wenn für eine Einheit Differenz zwischen den zwey Zahlen 3579 und 3578,

*) Diese Differenz findet man in einigen z. B. in den unten genannten Vegaschen Tafeln zur Seite der Logarithmen selbst.

man 1214 zur Differenz zwischen ihren Logarithmen hat,

Wie viel für 0, 59 Differenz zwischen den zwey Zahlen 3578, 59 und 3578,

Wird man Differenz zwischen ihren Logarithmen haben?

D. h. man sucht das vierte Glied einer Proportion, wovon die drey ersten Glieder

1 : 1214 = 0, 59:

sind.

Dieses vierte Glied ist 716, 26, oder bloß 716, indem man die Decimaltheile wegläßt; Man addirt also 716 zu den Logarithmus 3, 5536403 von 3578, und hat 3, 5537119 für den Logarithmus von 3578, 59: um nun den Logarithmus von 357859, so darf man nur zwey Einheiten zur Caracteristik des oben gefundenen Logarithmus addiren, und man wird 5, 5537119 für den gesuchten Logarithmus haben, weil 357859, 100 mal größer als 3578, 59 ist.

Wenn die Ziffern welche man zur Rechten der Zahl trennen soll alle Nullen sind, so ist, nachdem man in den Tafeln den Logarithmus des zur Linken gebliebenen Rest gefunden hat, nichts weiter übrig zu machen, als, zu der Caracteristik so viel Einheiten hinzusetzen, als man Nullen von der vorgegebenen Zahl getrennt hat.

Von den Logarithmen deren Zahlen sich nicht in den Tafeln finden.

253.

Diese Untersuchung ist nicht weniger nothwendig als die vorhergehende. Z. B. für die Division, geschiehet es sehr selten daß der Quotient eine ganze Zahl sey; daher findet man, wenn die Operation durch Logarithmen geschiehet, den übrigbleibenden Logarithmen nur dann in den Tafeln, wenn der Quotient eine ganze Zahl ist, die jedoch die Grenze der Tafel nicht überschreiten darf: es giebt noch eine unendliche Menge andere Fälle von derselben Art.

254.

Wir wollen uns zuerst aufgeben, zu finden, zu was für eine Zahl ein vorgegebener Logarithmus gehört, es sey daß er die Grenzen der Tafeln übersteigt, oder es sey, daß er zwischen den Logarithmen der Tafeln fällt.

Man zieht von der Characteristik so viel Einheiten ab als nöthig ist, damit man in den Tafeln, die ersten Ziffern des vorgegebenen und so vorbereiteten Logarithmus finden könne. Wenn sich alsdann alle Ziffern in den Tafeln finden, so wird die gesuchte Zahl die Zahl selbst seyn, welche man in den Tafeln zur Seite findet, zu der man aber rechter Hand noch so viele Nullen setzt, als man Einheiten von der Characteristik abgezogen hat.

Z. B. der Log. 7, 2273467 entspricht (wenn man vorher drey Einheiten von der Characteristik weggenommen hat) genau

nau der Zahl 16879; daraus schließt man daß der vorgegebene Logarithmus 7, 2273467 der Zahl 26879000 entspricht.

Wenn man in den Tafeln, nur die ersten Ziffern des Log. findet, so verfährt man wie im folgenden Beyspiele.

Um zu finden zu welcher Zahl der Log. 5, 2432768 gehört, so zieht man zwey Einheiten von seiner Caracteristik ab; der Log. 3, 2432768 welchen man alsdann hat, fällt zwischen den Logarithmen von 1750 und 1751; die Zahl welcher er entspricht ist also 1750 und einen Bruch.

Um diesen Bruch zu haben, zieht man von unserm Log. 3, 2432768, den Log. von 1750 ab, und man hat zur Differenz 2388.

Man nimmt auch in den Tafeln, die Differenz 2481 zwischen den Logarithmen von 1751 und 1750, und nach diesen macht man folgende Regel Detri.

Wenn 2481 zwischen den Logarithmen von 1751 und 1750

Einer Einheit Differenz zwischen diesen Zahlen entspricht,

Welcher Zahlen Differenz muß die Differenz 2388 zwischen unsern Log. und den von 1750 entsprechen?

Man findet zum vierten Gliede $\frac{2388}{2481}$; also gehört der Log. 3, 2432768 bis auf sehr weniges zu der Zahl $1750\frac{2388}{2481}$; folglich, der vorgegebene Log. welcher zu einer 100mal größern Zahl gehört, hat zur correspondirenden Zahl 175000 $\frac{238800}{2481}$, d. h. $175096\frac{624}{2481}$, oder indem man in Decimaltheile reducirt, so hat er als correspondirende Zahl 175096, 25.

255.

Wenn der vorgegebene Log. zwischen denen der Tafeln fiele, so wäre gar keine Einheit von der Caracteristik wegzunehmen, und folglich zu Ende der Operation keine Nullen anzuhängen, übrigens ist das Verfahren mit obigem einerley.

256.

Da aber die von uns in dieser Methode angewandte Proportion nicht ganz strenge ist*), und sie sich nur der Wahrheit um so mehr nähert, als die gesuchten Zahlen groß sind; so muß man, wenn der vorgegebene Logarithmus unter den von 1500 fiele, um mehrerer Genauigkeit willen, zu seiner Caracteristik so viel Einheiten zusetzen als man ohne die Grenzen der Tafeln zu übersteigen thun könnte, und wenn man die Zahl gefunden hat die in diesen Tafeln sich am meisten zu entsprechen nähert, so trennt man davon zur Rechten durch ein Komma so viel Ziffern ab, als man Einheiten zur Caracteristik addirt hat, welches am öftern gnügen wird; will man aber mehr Decimalstellen haben, so macht man die Proportion wie oben (§. 254.), und nachdem das vierte Glied in Decimaltheile reducirt ist, so setzt man solche am Ende der schon-gefundenen hinzu.

Z. B. Wenn man zu wissen verlangt zu welcher Zahl der Log. 0, 5432725 gehört; da dieser Log. zwischen den von 3 und 4 fällt, und die Zahl zu welcher er gehört, folglich viel unter 1500 ist, so sucht man diesen Log. mit einer um 3 Einheiten größern Caracteristik; d. h. man sucht 3, 5432725; man findet daß er zwischen den Logarithmen von 3493 und 3494 fällt, woraus man schließt daß die gesuchte Zahl 3,493 bis auf eintausendtheil nahe ist. Wenn aber die Näherung nicht gnüget, so nimmt man die Differenz zwischen unsern Log. und den von 3493, d. h. 739; man nimmt eben so die Differenz 1243 zwischen den Logarithmen von 3494 und 3493, und sucht indem man wie oben (§. 254.) raisonnirt, daß

*) Diese Proportion setzt voraus, daß die Differenzen der Logarithmen den Differenzen der Zahlen proportional sind, welches niemals ganz strenge wahr ist, aber sich doch hinlänglich nähert, wenn die Zahlen ein wenig groß sind, und dieses reicht für den gewöhnlichen Gebrauch hin.

daß vierte Glied einer Proportion, die mit diesen drey Glie-
der anfängt,

1243 : 1 = 739:

Dieses vierte Glied in Decimaltheile berechnet, ist 0,594;
mithin ist die gesuchte Zahl 3,493594.

Uebrigens ist diese zweyte Näherung (Approximation)
beschränkt, denn da die Logarithmen in den gewöhnlichen
Tafeln nur etwa bis auf eine halbe Decimal-Einheit der
vten Ordnung genau sind, so leiden die Unterschiede aller-
hings von dieser kleinen Unrichtigkeit; man kann aber im-
mer die Näherung mit Zuversicht, bis auf drey Decimalstel-
len treiben: Ueberdem, ist es selten daß man so weit zu ge-
hen nöthig hätte; aber die Bemerkung welche wir machen,
muß auch im Gebrauche welchen wir oben (§. 252. und §. 254.)
von derselben Proportion gemacht haben beherziget werden.

257.

Wenn man den Bruch haben will zu welchem ein vorgegebener negativer Logarithmus gehört, so zieht man diesen Log. von 1 oder 2, oder 3, oder 4 Einheiten u. s. w. ab, wie es die Ausdehnung der Tafeln erlauben wird; und nachdem man die Zahl welche den bleibenden Log. entspricht gefunden hat, so wird man davon zur Rechten, durch ein Komma, so viel Ziffern ab schneiden, als man Einheiten angewendet hat, um den Log. abzuziehen.

Z. B. Wenn man zu wissen verlangt, zu welchem Bruche der Log. — 1,5327325 gehört, so zieht man 1,5327325 von 4 ab, und es bleibt 2,4672675, welcher in den Tafeln zwischen den Logarithmen von 293 und von 294 fällt; daraus schließt man daß der gesuchte Bruch zwischen 0,0293 und 0,0294 ist; d. h. er ist 0,0293 bis auf ein tausendtheil nahe. In der That, den vorgegebenen Log. 1,5327325 von 4 abziehen, heißt (§. 248.) 10000 mit dem Bruche multipliciren zu welcher derselbe vorgegebene Log. gehört, oder wel-

ches einerley ist, es heißt diesen Bruch mit 10000 multipliciren; mithin ist die Zahl welche man findet 10000 mal zu groß; man kann sie also für zehntausendtheile rechnen.

Alles so eben Gesagte wird in der Folge häufig seine Anwendung finden. Für jetzt wollen wir uns begnügen, durch einige Beyspiele eine Idee von dem Vortheile zu geben, den die Logarithmen für die Leichtigkeit und der Schnelligkeit der Rechnungen verschaffen.

Erstes Beyspiel.

Man verlangt den Quotienten von 17054 durch 12836 dividirt, bis auf ein Zehntausendtheil nahe.

Logarithmus von 17954 . . . . . 4, 2541612
Logarithmus von 12836 . . . . . 4, 1084297

Rest 0, 1457315

Diesen Rest, in den Tafeln mit einer um 4 Einheiten größern Caracteristik aufgesucht, entspricht der Zahl 13987; mithin ist der gesuchte Quotient 1, 3987.

Zweytes Beyspiel.

Man verlangt die Cubicwurzel von 53, bis auf ein Tausendtheil nahe.

der Logarithmus von 53 ist 1, 7242759
sein 3ter Theil (§. 242.) ist 0, 5747586

Diesen letzten Log., in den Tafeln mit einer um 3 Einheiten größern Caracteristik aufgesucht, entspricht der Zahl 3756; die gesuchte Wurzel wird daher 3, 756 seyn.

Um über den Vortheil der Logarithmen zu urtheilen, so darf man nur diese Wurzel durch die §. 146. gegebene Methode suchen.

Drittes Beyspiel.

Man giebt auf 4, 53 mit 0, 527 zu multipliciren.

(§. 246.) Log. 4, 53 . . . . 0, 6560982
(§. 249.) Log. 0, 527 . . . 0, 2781894

also (§. 248.) . . . . . 0, 3779088 . . . . welcher (§. 254.) der Log. von 2, 38931 ist.

Uebrigens, ist es in diesem und ihm ähnlichen Beyspielen, unnöthig seine Zuflucht zu den (§. 246. und §. 249.) gegebenen Regeln zu nehmen. Es Genügt die Logarithmen der beyden vorgegebenen Zahlen so zu addiren als wenn keine Decimalstellen da wären, und nachdem die dazu correspondirende Zahl gefunden ist, so trennt man davon (§. 54) so viel Decimalstellen als in den Factoren waren.

Viertes Beyspiel.

Man verlangt 4 mittlere geometrische Proportionalzahlen zwischen $2\frac{2}{3}$ und $5\frac{3}{4}$.

Man müste (§. 199.) um den Nahmen zu haben, welcher in der Progression herrschen muß, $5\frac{3}{4}$ mit $2\frac{2}{3}$ dividiren, und aus dem Quotienten die 5te Wurzel ausziehen.

Mit Logarithmen, ist das Verfahren viel einfacher. Man bestimmt die Logarithmen von $5\frac{3}{4}$ oder $\frac{23}{4}$, und von $2\frac{2}{3}$ oder $\frac{8}{3}$; und findet 0, 7596678 und 0, 4259687. Diesen letzten zieht man von dem erstern ab (§. 243.), und nimmt (§. 242.) den 5ten Theil des Restes; so hat man 0, 0667398 für den Log. des gesuchten Nahmen. Die zu diesen Log. gehörige Zahl ist 1, 1661 bis auf ein Tausendtheil nahe. Um also die verlangten mittlern Proportionalzahlen zu haben, so ist nur noch das erste Glied $2\frac{2}{3}$; mit 1, 1661 zu multipliciren alsdann dieses Product, durch 1, 1661; u. s. w.

Aber man kann von den Logarithmen Gebrauch machen um diese Multiplicationen schneller auszuführen; dazu ist es hinlänglich auf einander folgend den gefundenen Log. von dem Nahmen, zu dem auch gefundenen Log. des ersten Gliedes $2\frac{2}{3}$ zu addiren, und man erhält die folgenden Resultate.

	Mittlere correspondirende geom. Proportionalzahlen.
Log. $2\frac{2}{3}$. 0, 4259687	
plus Log. des Nahmen . 0, 4927085	3, 109
plus 2 mal den Log. des Nahmen . 0, 5594483	3, 626
plus 3 mal den Log. des Nahmen . 0, 6261881	4, 228
plus 4 mal den Log. des Nahmen . 0, 6929279	4, 931

Von dem arithmetischen Complement, und von seinem Gebrauche.

258.

Wenn in einer Operation, wo man von den Logarithmen Gebrauch macht, sich einige finden, die abgezogen werden sollen, so kann man durch folgende Betrachtung die Operation abkürzen.

Wenn man eine beliebige Zahl von einer Einheit mit so viel Nullen als jene Zahl Ziffern hat, abzuziehen hat; so reducirt sich die Operation darauf, die Differenz zwischen 9 und jeder der Ziffern der vorgegebenen Zahl zu schreiben, mit Ausnahme der letztern für welche man die Differenz zwischen 10 und diese Ziffer schreibt.

Z. B. Wenn man 526927 von 1000000 abzuziehen hat; so zieht man successive die Ziffern 5, 2, 6, 9, 2 von 9 ab; und die letzte Ziffer 7, zieht man von 10 ab, und hat zu Rest 473073.

Diesen Rest nennt man das arithmetische Complement der vorgegebenen Zahl.

Da die auf solche Art gemachte Subtraction zu einfach ist, als das solche für eine Operation gerechnet werden könnte, so folgt daraus, daß, wenn man ein Resultat aus der Addition und der Subtraction mehrerer Zahlen zu bilden hat, man allezeit die Operation in eine Addition verwandeln kann.

Z. B. Es soll von der Summe der zwey Zahlen 672736 und 42645, die Summe der zwey Zahlen 432752 und 18675 abgezogen werden. Dieses erfordert zwey Additionen und eine Subtraction, statt dieser Operation kann man die folgende substituiren.

	672736
	42645
arith. Complement von 432752 . . .	567248
' ' ' 18675 . . .	981325
Summa	2647761

D. h. Man addirt die beyden ersten vorgegebenen Zahlen, und das arithmetische Complement von den zwey letzten zusammen; die Summe ist 2647761. Hiervon muß man die letzte Ziffer 2 zur linken weglassen; und die übrig bleibenden Ziffern 647761 sind das gesuchte Resultat.

Der Grund von dieser Operation ist leicht wahrzunehmen, wenn bemerkt wird, daß statt 432752, wie man vorgegeben hat, abzuziehen, man ihr arithmetisches Complement addirt, d. h. 1000000 weniger 432752, man zu gleicher Zeit die vorgegebene Subtraction, um eine Vermehrung von 1000000 macht, d. h. um einen Zehner zur ersten Ziffer des Resultats; mithin wird man für jedes eingeführte arithmetische Complement, einen Zehner in Ansehung der ersten Ziffer des Resultats zu viel haben.

Die Anwendung von diesem auf die Logarithmen ist evident.

Erstes Beyspiel.

Es sey die Frage 3760 durch 79 zu dividiren; man muß den Log. von 79 von den Log. 3760 abziehen. Statt dieser Operation schreibt man

Log. 3760 . . .	3,5751878
arithm. Complement des Log. von 79 .	8,1023729
Summa	11,6775607

Also ist 1,6775607 der Log. des Quotienten, und entspricht der Zahl 47,59 bis auf ein Hundertheil nahe.

Zweytes Beyspiel.

Würde gefordert $\frac{675}{527}$ mit $\frac{952}{377}$ zu multipliciren, so müßte man (§. 97.) 675 mit 952, und 527 mit 377 multipliciren, alsdann das erste Product durch das zweyte dividiren.

Mit Logarithmen operirt man so,

	lg. 675 . .	2, 8293038
	lg. 952 . .	2, 9786369
arith. Complement des	lg. 527 . .	7, 2781894
" " "	lg. 377 . .	7, 4236596
	Summa	20, 5097897

Der Log. des Products ist daher 0, 5097897 *welcher mit* 3 Einheiten in der Caracteristik mehr aufgesucht, der Zahl 3, 234 entspricht.

Man kann von dem arithmetischen Complement Gebrauch machen, um die Logarithmen der Brüche, unter dieselbe Form als die der ganzen Zahlen zu seßen, und sie eben so im Calcul anwenden. Dadurch vermeidet man die Unterscheidung der negativen und der positiven Logarithmen. Es wird gnügen sich zu erinnern, daß die Caracteristik des Logarithmen der eigentlichen Brüche, um 10 Einheiten zu groß ist.

Z. B. um den Log. von $\frac{3}{4}$ zu haben, welcher (§. 89.) nichts anders ist, als 3 durch 4 dividirt; Statt den Log. von 4, von den von 3 abzuziehen. D. h. den Log von 3 von den von 4 abziehen, und (§. 347.) dem Reste das Zeichen — geben, addirt man das arithmetische Complement des Log. von 4;

Log. 3 . . .	0, 4771213
arithm. Complement des Log. 4 . .	9, 3679400
Summa	9, 8750613

Diese Summe ist der Log. von $\frac{3}{4}$, dessen Caracteristik um 10 Einheiten zu groß ist. Es ist aber nicht nöthig

jetzt die Verminderung zu machen; man kann sie am Ende der Operationen in welchen man diesen Log. anwenden wird, wegwerfen.

Dieselbe Regel findet auch bey Decimalbrüchen ihre Anwendung.

Also um den Log. von 0, 575 zu haben, der nicht anders ist als der Log. $\frac{575}{1000}$; addirt man zu den Log. von 575 den Log. von 1000; welcher sich allgemein, darauf reducirt, den Log. des vorgegebenen Decimalbruchs zu nehmen, so als wenn kein Comma in dieser Größe wäre, und zu der Caracteristik dieses Log. so viel Einheiten hinzusetzen, als Differenz zwischen 10 und der Anzahl der Decimalbruchziffern.

In gegenwärtigem Falle, z. B.; setzt man zu der Caracteristik des Logarithmus 2, 7596678 der Zahl 575, 7 als Differenz zwischen 10 und der Zahl 3 der Decimalbruchstellen 0, 575, und man wird für den Log. von 0, 575, 9, 7596678 haben, wenn hierbey die Carracteristik um 10 Einheiten zu groß verstanden wird.

Wendet man solchergestalt die arithmetischen Complemente statt der negativen Logarithmen von den Brüchen an, so ist es nicht schwerer in den Tafeln die Werthe von diesen Brüchen in Decimaltheilen zu finden. Sobald man weiß daß ein vorgegebener Logarithmus, aus ein oder mehreren arithmetischen Complementen zusammengesetzt ist, oder enthält; so weiß man auch daß seine Caracteristik um so viel Zehner zu groß ist als darin arithmetische Complemente enthalten sind; wenn sie daher diese Zahl von Zehner übersteigt, so wird es leicht seyn sie zu vermindern, und die Zahl zu finden zu welchen dieser Logarithmus gehört, und welcher eine ganze Zahl, oder eine ganze Zahl mit einem Bruche seyn wird.

Wenn man aber die Caracteristik unter die Zahl von Zehner ist welche sie zuviel enthaltend gedacht wird; so gehört sie sicherlich zu einem Bruche den man auf folgende Art finden wird. Man wird, nachdem was (§. 253 u. folg.) gesagt ist, suchen zu welcher Zahl der vorgegebenen Log. gehört, und wann man ihm gefunden hat, so trennt man davon durch ein Comma, so viel Zehner-Ziffern zur Rechten, als Zehner in der Caracteristik zu viel seyn werden.

Z. B. Wenn man 8,732350 als ein durch eine Operation entstandener Logarithmus giebt, in welchen ein arithmetisches Complement eingeschlichen ist: so sieht man, weil seine Caracteristik unter ein Zehner ist, daß er zu einem Bruche gehört. Man sucht zuerst (§. 254.) welcher Zahl 8,7322350 als ein zu einer ganzen Zahl gehörigen Log. entspricht; man findet daß er zu der Zahl 529802600 gehört; trennt man davon 10 Ziffern, so hat man 0,0536802600 für den sehr nahen Werth des Bruchs welcher den vorgegebenen Log. entspricht.

Da es aber sehr selten nöthig ist diese Brüche bis auf einen solchen Grad von Genauigkeit zu haben; so wird man abkürzen, indem man sogleich die Caracteristik des vorgegebenen Logarithmus, so viel vermindert als nöthig ist, um sie zwischen denen der Tafel fallen zu lassen, und nur die dazu correspondirende Zahl nimmt, davon so viel Ziffern weniger abschneidet als die vorhergehende Regel vorschreibt, so viel weniger nemlich, als man von der Caracteristik Einheiten weggenommen hat.

Also, in dem eben gegebenen Beyspiele, vermindert man die Caracteristik um 5 Einheiten, und nachdem man gefunden hat, daß die correspondirende Zahl 5398 ist, so schneidet man nur 5 Ziffern ab, und erhält 0,05398.

In den Erhebungen zu Potenzen, muß man

beobachten, daß, indem man den Log. durch die Zahl welche den Grad der Potenz anzeigt multiplicirt (§. 239), es sich findet, daß man auch dasjenige um welches die Caracteristik zu groß seyn soll, multiplicirt; also indem man z. B. zum Cubus erhebt, und in den vorgegebenen Log. ein arithm. Complement ist, d. h. wenn die Caracteristik um 10 Einheiten zu groß ist, die Caracteristik des Logarithmus vom Cubus, um 30 Einheiten zu groß seyn wird, und so mit den andern Potenzen, es wird also leicht seyn die Caracteristik auf ihren wahren Werth zurück zu setzen, oder in Rechnung zu bringen.

Um in den Ausziehungen der Wurzeln alle Fehler zu vermeiden wenn arithmetische Complemente in den Logarithmen von welchen man Gebrauch macht vorkommen, so wird man Sorge tragen zu der Caracteristik so viel Zehner zu zusetzen oder abzunehmen, als nöthig ist, um daß dasjenige um welches sie zu groß seyn wird, so viel Zehner betrage als Einheiten in der Zahl welche den Grad der Wurzel angezeigt, sind, und hat man der gewöhnlichen Regel gemäß durch die Zahl welche den Grad der Wurzel anzeigt dividirt, so wird die Caracteristik genau um 10 Einheiten zu groß seyn.

Z. B. Wenn man die Cubicwurzel von $\frac{276}{547}$ verlangte; zu den Log. von 276, addirt man das arithmetische Complement von dem Log. 547.....

Log. 276 . .	2, 4409091
arith. Compl. des Log. von 447 . . .	7, 2620125
Summa	9, 7029218
Caract. wird hinzu gesetzt . .	20, ...
	29, 7029218

Damit die Caracteristik um 3 Zehner zu groß wird, und man hat 29, 7029218, davon der 3te Theil 9, 9009739 der Log. von der geforderten Cubicwurzel ist, aber mit 10 Einheiten Caracteristik zu viel; also, dem was oben beobachtet ist gemäß, findet man daß diese Cubicwurzel 0, 7961 bis auf 10 Tausendtel ist.

259.

Erstes Beyspiel.

In einer Provinz befinden sich 2 Millionen Menschen: wenn nun diese Summe jährlich um den 50ten Theil, d.i. um 2 pro C. zunimmt, wie groß würde wohl die Anzahl der Menschen nach 100 Jahren seyn?

Gleiche Raisonnements wie bey der Zinsaufzinnsrechnung giebt die gesuchte Anzahl Menschen

gleich $(\frac{102}{100})^{100}$. 2000000, oder der Logarithmus von der gesuchten Anzahl Menschen

ist gleich lg. 2000000 + 100 . lg. $(\frac{102}{100})$
= lg. 2 + lg. 1000000 + 100 (lg. 102 — lg. 100)
= lg. 2 + 6 + 100 lg. 102 — 200
= 7, 1610500

also sind es beinahe 14490000 Menschen.

Zweytes Beyspiel.

Zur wie vielsten Potenz muß man 10 erheben, damit 625 herauskömmt?

Eine directe Auflösung dieser Aufgabe findet nur durch die Logarithmen statt. Es wird nemlich hier der Exponent der Potenz 625 von 10 gesucht, also soll seyn

10 Exponent = 625
daher Exponent mal lg. 10 = lg. 625
folglich Exponent = $\frac{\text{lg. } 625}{\text{lg. } 10}$ = 2, 7958801.

Viertes Beyspiel.

Die Seite 302 und 303 stehende Aufgabe läßt sich durch Logarithmen directe ganz kurz so beantworten.

Die Anzahl Jahre die gesucht werden bezeichne man mit x, so ist

$$(\tfrac{26}{25})^x \cdot 10000 = 118000$$

$$\text{daher } x \lg.(\tfrac{26}{25}) + 4 = \lg. 118000$$

$$\text{oder } x(\lg. 26 - \lg. 25) = \lg. 118000 - 4$$

$$\text{folglich } x = \frac{\lg. 118000 - 4}{\lg. 26 - \lg. 25}$$

Die weitere Rechnung wird man leicht ausführen.

260.

In Deutschland sind die kleinern und größern Vega'schen logarithmischen Tafeln ohnstreitig die bequemsten und correctesten: ihr Titel ist dieser:

Georg Veg'as, ... Logarithmisch-trigonometrisches Handbuch u. s. w. Leipzig. 1793. gr. 8ct. 1 Thl. 4 Gr.

Dessen Logarithmisch-trigonometrische Tafeln nebst andern zum Gebrauch der Mathematik eingerichteten Tafeln und Formeln. 2 Bände. 2te Auflage. Leipzig 1797. 5 Thl.

Der Herr Major Vega hat auch 1794 bey dem Verleger der vorhergenannten Tafeln die größern Vlacschen Tafeln in klein Folio herausgegeben, die man für 10 Thl. erhält.

Vergleichung
der
vornehmsten Münzen, Maaße und Gewichte,
in Europa.

Erklärung der gebrauchten Abkürzungen.

* Ein Sterngen hinter eine Zahl zeigt an, daß sie veränderlich ist.

Rthlr. Thl.	— bedeutet	Reichsthaler oder Thaler.
Rfl. fl.	— —	Reichsgulden oder Gulden.
Gr.	— — —	Groschen.
Ggr.	— —	gute Groschen.
Sgr.	— —	Silbergroschen.
Krgr. Kgr.	—	Kaisergroschen.
Pf.	— — —	bisweilen Pfund, bisweilen Pfennig, welches der Zusammenhang leicht ausweiset.
ßl.	— — —	Schilling.
mk.	— — —	Mark.
Xr.	— — —	Kreuzer.
f. G.	— —	fein Gold.
f. S.	— —	fein Silber.
hl.	— — —	Heller.
Mfl.	— —	Mariengulden.
Mgr.	— —	Mariengroschen.

m. o. w. — — — bedeutet mehr oder weniger.
vl. oder vls. — — = vlämisch oder flämisch.
L. vl. oder L. vls. — = Pfund flämisch.
pf. vls. — — — = Pfennig flämisch.

I. Deutschland.

Da Deutschland aus einer so großen Menge größerer und kleinerer Länder bestehet, die fast alle ihr eigenes Geld haben, so findet man hier eine fast unübersehliche Menge von Münzsorten, und selbst eine große Verschiedenheit des Rechnungsgeldes. Indessen lassen sich doch die verschiedenen Arten des Rechnungsgeldes unter drey Hauptklassen bringen. Denn in einem großen Theil von Deutschland rechnet man nach Thalern, in einem andern nach Gulden, und endlich in einem nicht unbeträchtlichen Strich, nach Marken.

1) Länder, in welchen das Geld nach Thalern gerechnet wird.

Ganz Ober- und Niedersachsen (Holstein, Hamburg, Lübek, ausgenommen), Westphalen, und fast der ganze Ober- und Nieder-Rheinische Kreis, rechnen nach Thalern. Mit diesen Ländern verbinden wir Schlesien und Preußen, wo jetzt gleichfalls diese Rechnungsart eingeführt ist. Wie der Thaler in jedem Lande eingetheilt wird, werden wir bey jedem Lande einzeln anführen:

A) In den Brandenburgischen Ländern, namentlich der Churmark, Pommern, Magdeburg und Halberstadt.

a) Rechnungsgeld
1 Thaler zu 24 Groschen: 1 Gr. zu 12 Pfennigen.

b) Valuta. 1) Banco. 2) Gold. 3) Courant.
100 Pf. od. Rthl. Bco. = 125 Rthl. Gold.
100 — — — = 131¼* Rthlr. Courant.
100 Rthl. Gold = 105* Rthl. Cour.

c) Gold, Friedrich, und Friedrich Wilhelm d'Or; zu 5 Rthl. Gold; und Ducaten zu 2¾ Rthl. Gold.

d) Silbergeld.

Thaler	Groschen	Pfennige
1	24	288

Ferner, halbe Thaler Stücke; desgleichen Stücke von 8, 6, 4, 2 Gr.; endlich 6, 4, 3 und 1 Pf. Stücke.

e) Der innere Gehalt.

1 Pf. Bco. = 31,48 As f. G. = 455 * As f. S.
1 Rthl. Gold = 25,19 — — = 364,66 — —
1 Rthl. Cour. = 24, * — — = 447,43 — —

B) Schlesien.

a) Rechnungsgeld.

1 Rthl. zu 30 Silbergr.; 1 Sgr. zu 12 Denar.

b) Valuta, wie im Brandenburgischen.

c) Gold, — — — —

d) Silbergeld

Thl. Cour.	Thl. schlesisch	Rfl.	Sgr.	Sgr. od. Böhmen
1	1¼	1½	24	30

Weiß Groschen	Xr.	Gröschel	Denar oder Pfennige
45	90	120	360

e) Innerer Gehalt, wie im Brandenburgischen.

C) Preußen.

a) Rechnungsgeld; wie im Brandenburgischen, noch häufiger aber rechnet man, wie in Pohlen, nach Gulden zu 30 Gr. und Gr. zu 18 Pfennig Preußisch.

b) Valuta. Preußisch Courant, und Brandenburgisch Courant, nebst den übrigen Brandenburgischen Valuten.

1 Rthl. Br. Cour. = 3 Gulden, Preußisch.

c) Gold, wie im Brandenburgischen.

d) Silbergeld.

Rthl. Brand. Cour.	Rfl.	Gulden Preußisch	Timpfe	Acht-halber.
1	1½	3	5	12
Sechser	Ggl.	Düttgen	Brummer	Groschen Preußl.
15	24	30	60	99
ßl.	Pfennige Preußisch			
270	1620			

e) Innerer Gehalt, wie im Brandenburgischen. Daher

1 fl. Preußl. = 8* As f. G. = 115,81 As f. S.

Anmerkung. In Danzig sind dieselben Namen, und eben das Rechnungsgeld gebräuchlich, nur ist das Danziger Geld weit schlechter als das Preußische; denn

1 fl. Danziger = 5,94 As f. G. = 86,81 As f. S.

Daher kann man rechnen

100 fl. Preußisch = 133 fl. Danziger; und

1 Rthl. Brandenb. Cour. = 4 fl. Danziger.

D) Schwedisch Pommern.

a) Rechnungsgeld, theils wie in Schweden.

nach Thl. zu 48 ßl.; 1 ßl. zu 12 Pf.

theils nach Gulden zu 24 ßl.; 1 ßl. zu 12 Pf.

b) Valuta. Courant.

c) Gold. Hat kein eignes Gold.

d) Silbergeld.

Thl.	Gulden Pommerisch	mk. Sundisch	gr.	ßl.
1	2	6	24	48
Sechslinge oder ßl. Sundisch.		Witten	Pf.	
96		192	576	

e) Innerer Gehalt. Die Schwedisch Pommerischen Münzen sind nach dem Reichsmünzfuß geprägt; daher ist

1 Thl. Pomm. Cour. = 26,84 As f. G. = 405,33 As f. S.

f) Vergleichung mit Brandenb. Courant.

100 Rthl. Pomm. Cour. = 116⅔ Brand. Cour. und
1 Rthl P. C. = 1 Rthl. 4 Gr. Brand. Cour.

E) Sachsen.

a) Rechnungsgeld

1 Thaler zu 24 Gr.; 1 Gr. zu 12 Pf.

b) Valuta. Courant.

c) Gold. August d'Or zu 5* Rthl. Gold. Dukaten 2¾* Rthl. Gold.

d) Silbergeld, wie im Brandenburgischen.

e) Innerer Gehalt. Die Sächsischen Münzen werden nach dem Conventionsfuß geprägt, daher ist

1 Thl. Sächs. Cour. = 25,5* As f. G. = 364,8 As f. S.

f) Vergleichung mit Brandenb. Courant.

100 Rthl. Sächs. Cour. = 105 Rthl. Brandenb. Cour.
1 Rthl. — — = 1 Rthl. 1 Gr. 2 Pf. Br. Cour.

F) Meklenburg.

a) Rechnungsgeld.

1 Thl. zu 48 ßl.; 1 ßl. zu 12 Pf. wie Schweden.
auch 1 Mark zu 16 ßl.; 1 ßl. zu 12 Pf. wie Hamburg.

b) Valuta. Courant.

c) Gold. Hat keine eigene Goldmünze.

d) Silbergeld.

Thl.	Rfl.	Gulden Meklenb.	Mark.	Gr.	ßl.
1	1½	2	3	24	48

Witten	Pfennige
192	576

e) Innerer Gehalt.

1 Thl. = 29,4* As f. G. = 429,18 As f. S.

f) Vergleichung mit Brandenb. Cour.

81 Rthl. Meklenb. Cour. = 100 Rthl. Brand. Cour.
1 Rthl. Mekl. = 1 Rthl. 5 Gr. 8 Pf. Brandenb. Cour.

G) Die Braunschweigischen Länder, namentlich die Städte Braunschweig, Hannover, Lüneburg, Wolfenbüttel, auch das Bisthum Hildesheim.

a) Rechnungsgeld.

1 Thl. zu 36 Mariengr.; 1 Mgr. zu 8 Pf.

b) Valuta. 1) Im Hannöverschen sind zweyerley Valuten üblich; Cassengeld, und Gold-Valuta. Ihr Verhältniß ist so, daß 14 Thaler Cassengeld, mit 15 Thaler Gold-Valuta gleich gerechnet werden. 2) Braunschweigisch Courant und Gold.

c) Gold.

Im Handverschen hat man George d'Or zu $4\frac{4}{5}$ Rthl.; Dukaten zu $2\frac{2}{3}$ Rthl. und Goldgulden zu 2 Rthl. Gold.

Im Herzogl. Braunschweigischen aber Carl d'Or zu 5 Rthl. und Ducaten zu $2\frac{3}{4}$ Rthl. Gold.

d) Silbergeld.

Thaler	Gulden	Gulden	Ggr.	Mgr.
1	$1\frac{1}{2}$	$1\frac{4}{5}$	24	36

Goeßgen	Matthier	Pfennige.
48	72	288

e) Innerer Gehalt. Zur Bestimmung desselben, finden sich in der neuen Ausgabe des Nelkenbrecher, folgende Data. Auf 1 Clln. Mk. f. S. sind zu rechnen $12\frac{4}{9}$ Thaler Cassengeld. Daraus folgt;

1 Thaler Cassengeld = 390,86 As f. S.

Ferner, wenn von den gewöhnlichen goldenen fünfthalerstücken 38,601 auf 1 Clln. Mk f. G. gehn; ein solches Stück aber $4\frac{2}{3}$ Thaler Cassengeld gilt, so folgt:

1 Thaler Cassengeld = 27,00 As f. G.

Für die Gold-Valuta müßte von jeden dieser Werthe der 15te Theil abgezogen werden.

Im Herzogl. Braunschweigischen ist der Conv. Fuß eingeführt, daher ist

1 Rthl. Braunschw. Cour. = 25,3* As f. G. = 364,8 As f. S.

1 Rthl. Gold = 25,19 As f. G.

f) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 Thl. Cassengeld. = 112 Thaler 12 Groschen,
1 ; ; = 1 ; 3 ;
100 ; Gold-Val. = 105 ; 6 ;
1 ; ; = 1 ; 1 ; $2\frac{2}{3}$ Pf.
100 ; Braunschw. Cour. = 105 Rthl. Brand. Cour.
1 ; Braunschw. Cour. = 1 Rthl. 1 Gr. 2 Pf. Br. C.

H) Im Herzogthum und in der Stadt Bremen, in Verden, Oldenburg und Delmenhorst.

a) Rechnungsgeld.

1 Rthl. zu 72 Groot; 1 Groot zu 5 Schwarm.

b) Valuta. Courant.

c) Gold. Dukaten zu $2\frac{3}{4}$ Rthl.

d) Silbergeld.

Thl.	Bremer Mark	Kopfstück	Dütgen.
1	$2\frac{1}{4}$	6	16
Flinrich	ßl.	Groot	Schwarm.
18	48	72	360

e) Innerer Gehalt.

1 Rthl. Cour. = 25 *As f. G. = 364 As f. S.

f) Vergleichung mit Brandenb. Courant.

100 Rthl. Brem. Cour = $104\frac{3}{4}$ Rthl. Brand. Cour.

1 — — — = 1 Rthl. 1 Gr. 1 Pf. Brand. C.

I) Das Herzogthum Cleve, desgleichen Jülich, Berg, Mark, und der ganze niederländische westphälische Kreis.

a) Rechnungsgeld.

1 Rthl. zu 60 Stüver; 1 St. zu 8 Pf. oder 16 Gr. Clevisch Courant.

b) Valuta. Courant. Gold.

c) Gold. Wie im Brandenburgischen.

d) Silbergeld.

Thl. Cour.	Rfl.	Thl. Clevisch	fl. Clevisch	ßl.	Ggr.
1	$1\frac{1}{2}$	2	3	8	24
Stüwer	Xr.	Fettmänngen	Füchse	Pf.	Heller
60	90	120	240	480	960

e) Innerer Gehalt, ist wie im Brandenb.

K) Ostfriesland, und namentlich Emden,

a) Rechnungsgeld

Rthl. zu 54 Stüver, zu 10 Witten

oder Gulden zu 20 — — 10 —

oder Gulden zu 10 Schaap, zu 20 —

b) Valuta. Courant. Gold.

c) Gold, wie im Brandenb.

d) Silbergeld.

Thl.	schlecht	Gulden	Mark	ßl.
Cour.	Thl.			
1	$1\frac{4}{5}$	$2\frac{7}{10}$	3	9

Flinderke	Schaap	Stüver	Groot
18	27	54	72

Syfert	Oertgens	Witten
108	116	540

e) Innerer Gehalt, ist wie im Brandenburgischen.

L) Im Bisthum Osnabrück.

a) Rechnungsgeld.

Thaler zu 21 ßl., zu 12 Pf.
auch Thaler zu 36 Mgr.; zu 7 Pf.

b) Valuta. Courant.

c) Gold

d) Silbergeld.

Thl.	fl.	ßl.	Mgr.	Matthier
1	$1\frac{1}{2}$	21	36	72

Pf.	Heller.
252	504

e) Vergleichung mit Brandenburgischen Courant.

100 Rthl. Osnabr. = 105 Rthlr. Brand. Cour.
1 Rthl. — = 1 Rthlr. 1 Gr. 2 Pf.

M) Bisthum Münster.

a) Rechnungsgeld.

Thaler zu 28 ßl., zu 12 Pf.

b) Valuta. Courant.

c) Gold.

d) Silbergeld.

Thl.	fl.	Blamüser	ßl.	Mgr.
1	$1\frac{1}{2}$	8	28	36

Pf.	Heller.
336	672

N) Bisthum Lüttich, auch Mastricht.

a) Rechnungsgeld
Gulden zu 20 Stüver, zu 4 Ortjes oder 16 Pf.

b) Valuta. Courant.

c) Gold. Dukaten zu $8\frac{1}{2}$ fl. oder 17 ßl. auch Florin d'Or zu 5 fl. oder 10 ßl.

d) Silbergeld.

Thl.	fl.	ßl.	Stüver	Ortjes od. Liards od. Aidens	Pf. Lütticher.
Patacon					
1	4	8	80	320	1280

e) Innerer Gehalt.
1 Rthl. od. Pat. = 33,57 As f. G. = 492,16 As f. S.
also 1 fl. = 8,39 — — = 123,04 — —

f) Vergleichung mit Brand. Cour.
100 fl. Lütticher = $35\frac{5}{12}$ Rthl. Brand. Cour.
1 fl. Lütt. = 8 Gr. 5 Pf.

O) Die freye Reichsstadt Aachen.

a) Rechnungsgeld.
Thaler zu 54 Mark; zu 6 Buschen.

b) Valuta. Species und Courant.
Diese beyde Valuten sind so verschieden, daß allezeit 4 Stück Courant nur 3 Stück Spec. von eben dem Namen machen.

c) Gold Dukaten zu $3\frac{1}{3}$ Rthl. Cour. m. v. w.

d) Silbergeld.

Thl.	fl.	ßl.	Aachner Gülden	mk.	Busche	Hell. Cour.
1	$1\frac{1}{2}$	6	9	54	324	1296

e) Innerer Gehalt.
1 Rthl. Spec. = 28,40 * As f. G. = 405 * As f. S.
1 Rthl. Cour. = 21,30 * — — = 304 * — —

f) Vergleichung mit Brand. Courant.
100 Rthl. Aachner Cour. = $87\frac{1}{2}$ Rthl. Brand. Cour.
oder 8 Rthl. Aachner Cour. = 7 Rthl. Brand Cour.
und 6 Rthl. Aachner Spec. = 7 Rthl. Brand. Cour.

1 Rthl. Aachn. Cour. = 21 Gr. Brand.
1 Rthl. — Spec. = 1 Rthl. 4 Gr. Brand.

P) Cölln, sowohl die freye Reichsstadt, als das ganze Erzstift.

a) Rechnungsgeld
Thaler Spec., zu 80 Albus Cour., zu 12 Hl.
oder Thaler Cour., zu 78 — — zu 12 —

b) Valuta. Species und Courant.

c) Gold. Dukaten zu 3 Rthl. Rpec.

d) Silbergeld.

Thaler Species	Thaler Courant	Gulden Species	Räder fl.	Herrn fl.	Cöllnische fl.
1	1 1/39	1 1/2	1 1/4	2	3 1/2

Ort	Bl.	Blaffert	Groschen oder Räder Albus	Gößgen	Clevische Stüver
4	8	20	30	48	60

Albus	Xr.	Leichte Albus	Fettmänngen	Heller
80	90	100	120	960

e) Innerer Gehalt.
1 Thl. Spec. = 21,54 As f. G. = 301 As f. S.
1 Thl. Cour. = 21 — — = 293,47 As f. S.

f) Vergleichung mit Brand. Cour.
100 Thl. Clln. Spec. = 86 1/5 Rthl. Brand. Cour.
100 Thl. Clln. Cour. = 84 1/2 — — —
1 Rthl. Clln. Spec. = 20 Gr. 9 Pf. Brand.
1 Rthl. Clln. Cour. = 20 Gr. 3 Pf. —

Q) Das Erzstift Trier.

a) Rechnungsgeld.
1 Thaler zu 54 Petermänngen.

b) Valuta. Courant.

c) Gold.

d) Silbergeld.

Thl.	fl.	große Petermänngen	Petermänngen	Xr.
1	1 1/2	18	54	90

e) Vergleichung mit Brand. Cour.

100 Rthl. Trierisch = 105 Rthl. Brand. und 1 Rthl. Tr.
= 1 Rthl. 1 Gr. 2 Pf. Brand.

K) Frankfurth am Mayn, das ganze Erzstift Mainz, auch Hessen-Darmstadt.

a) Rechnungsgeld.

Thaler zu 90 Kreutzer, zu 4 Pf.
auch Gulden zu 60 — zu 4 —

b) Valuta. Wechselgeld. Gold. Courant Münze.

c) Gold. Dukaten zu 4 fl. 10 Xr. Cour.

d) Silbergeld.

Thl.	Thl.	fl.	Kopfstück	Batzen	Krgr.
Species Cour.					
1	$1\frac{1}{2}$	2	6	30	40

Albus	Xr.	Pf.
60	120	480

c) Innerer Gehalt.

1 Thl. W. G. = 24,4 As f. G. = 344 * As f. S.
1 — Gold = 25 — —
1 — Cour. = 25,7 — — = 364,8 — —

Anmerkung. Das Courant wird also nach dem Conv. oder 20 fl. Fuß ausgemünzt. Die vierte Valuta aber, die wir bey b Münze genannt haben, und die man bloß des vielen schlechten Geldes wegen, das dort roulirt, hat zulassen müssen, ist viel schlechter, und heißt der 24 fl. Fuß, ob sie gleich sehr veränderlich ist, so daß ihr innerer Werth nicht wohl bestimmt werden kann. Doch kann man zur Vergleichung merken, daß

5 ff. Conv. od. Cour. ohngefähr 6 fl. Münze betragen.

f) Vergleichung mit Brand. Courant

129 Thl. W. G. = 100 Pf. Berl. Bco. = $131\frac{1}{4}$ * Rthl. C.
$100\frac{1}{4}$ Thl. G. in Frankf. = 100 Thl. Gold in Fried. d'Or
100 Thl. Fr. Cour. = 105 Rthl. Brand. Cour.

1 Rthl. Fr. W. G. = 1 Rthl. und 5 Pf. Brand. Cour.
1 — Fr. Gold = 1 Rthl. 1 Gr. — —
1 — Fr. Cour. = 1 Rthl. 1 Gr. 2 Pf. — —

S) Hessen-Cassel.

a) Rechnungsgeld.
Thaler zu 31 Heß. Albus zu 9 Pf. oder 12 Heller.

b) Valuta. Courant.

c) Gold.

d) Silbergeld.

Thl.	fl.	Ggr.	Heß. Albus	Mgr.	Xr.
1	1½	24.	32	36	90

Pf.	Heller.
288	384

e) Innerer Gehalt. Conv. Fuß; daher
1 Thl. Hess. Cour. = 25,5 *As f. S. = 364,8 As f. S.

f) Vergleichung mit Brand. Cour.
100 Rthl. Hess. Cour. = 105 Rthl. Brand. Cour.
1 — — — = 1 Rthl. 1 Gr. 2 Pf. Brand. C.

2) Deutsche Länder, in welchen man das Geld nach Gulden rechnet.

In dem ganzen österreichischen, bayrischen, fränkischen und schwäbischen Kreise, rechnet man überall nach Gulden.

T) Der österreichische Kreis, nebst Böhmen und Mähren, oder überhaupt die kaiserlichen deutschen Erblande, auch Ungarn.

a) Rechnungsgeld
Gulden, zu 60 Kreutzer zu 4 Pfennig.

b) Valuta. Courant.

c) Gold. Souverins zu 12 fl. 40 Xr.
Kaiserliche Dukaten zu 4 fl. 16 Xr.
Kremnitzer — zu 4 fl. 18 Xr.

d) Silbergeld.

Thl. Spec.	Thl. Cour.	fl.	ßl.	Krgr.	Xr.	Gröschel
1	1 1/3	2	16	40	120	160

Pf.	Heller.
480	960

e) Innerer Gehalt.

1 Rthl. Oest. Cour. = 25,94 As f. G. = 364,3 As f. S.
1 fl. — — = 17,29 — — = 243,2 — —

f) Vergleichung mit Brand. Cour.

100 Rthl. Oest. Cour. = 105 Rthl. Brand. Cour.
oder 100 fl. — — = 70 Rthl. — —

1 Rthl. Oest. Cour. = 1 Rthl. 1 Gr. 2 Pf. Brand.
1 fl. — — = 16 Gr. 10 Pf. Brand.

U) Im ganzen Bayerschen Kreise, auch in Regensburg

a) Rechnungsgeld.

Gulden zu 60 Xr., zu 4 Pf.

b) Valuta. 1) Conventionsgeld, 2) Münze oder Bayrisch Courant, oder weiße Münze, 3) schwartze Münze.

c) Gold. Carolin d'Or zu 10 fl. 42 Xr. Cour.
Max d'Or — 7 : 8 — —
Bayr. Ducaten — 4 : 48 — —
Goldgulden — 3 : 9 — —
Regensb. Ducaten — 4 : 10 — —

d) Silbergeld.

Thl. Cour.	fl.	Batzen.	Krgr.	Landmünzen.
1	1 1/2	22 1/2	30	36

Albus	Xr.	fl.
45	90	360

e) Innerer Gehalt.

1 Rthl Conv. = 25,77 As f. G. = 364,8 As f. S.
1 Rthl. Bayr. Cour. = 22,2 As f. G. = 304 As f. S.

f) Vergleichung mit Brand. Cour.

100 fl. Conv. = 70 Rthl. Brand. Cour.
12 fl. Bayr. Cour. = 7 fl. Br. Cour.
1 fl. Conv. = 16 Gr. 10 Pf. Be. Cour.
1 fl. Bayr. Cour. = 14 Gr. Br. Cour.

Die bey b erwähnte schwarze Münze wird hauptsächlich in Regenspurg, aber nur bey gerichtlichen Strafen, Contributionen, Grundzinns, u. d. gl. gebraucht. Diese Valuta hat ihre ganz eigene Rechnungsart und Abtheilungen, nemlich:

Pfund Regensp.	Pfund Pfennige	ßl.	gr.	Regenspurger Pf.	Hl.
1		5	41	164	490	1230	2460

= 5 5/7 fl. weißer Münze.

Hierbey wird man leicht bemerken, daß die hier vorkommenden Benennungen, Gr. und Pf. von eben diesen Benennungen bey weißer Münze sehr verschieden sind.

V) In dem fränkischen Kreise rechnet man überall nach fl. Xr. und Pf., doch ist das Geld von verschiedenen Gehalt. Der merkwürdigste Handelsplatz ist Nürnberg; und diese Stadt soll daher die einzige seyn, bey der wir uns aufhalten.

a) Rechnungsgeld
Gulden, zu 60 Xr., zu 4 Pf.
auch Gulden, zu 20 ßl. oder Krgr. zu 12 Pf.

b) Die Valuta, ist dreyfach. 1) Banco, welches auch Courant und Wechselgeld heißt. Der wahre Werth dieser Valuta ist der Conventionsfuß. Es werden aber nur bestimmte Geldsorten, und grobes Silbergeld in der Nürnberger Banque angenommen. Der Cours dieser Valuta aber ist gegen andere Orte beständigen Veränderungen unterworfen.

2) Moneta d'oro, besteht in Carolin zu 9 fl. gerechnet.

3) Moneta bianca, Weiß-Geld, Münze ist das Nürnberger neue Stadtgeld.

c) Gold

Ducaten zu 4 fl. 10 Xr. Bco. m. d. w. od. 5 fl. — Xr. Weiß Geld.
Goldgulden zu 3 fl. 4 Xr. — — — — 3 fl. 40 — — —

d) Silbergeld.

Thaler	Thl.	fl.	Kopfstück	Batzen	Bl.
Species	Cour.				
1	$1\frac{1}{3}$	2	6	30	40

Xr.	Pf.
120	480

e) Innerer Gehalt.

1 Rthl Courant = 25,8 *As f. G. = 364,8 As f. S.
1 — Mon. d'oro = 25,19 — —
1 — Münze = 25,5 — — = 304 — —

f) Vergleichung mit Brand. Gelde.

100 fl. Nürnb. Bco. oder Cour. = 70 Rthl. Br. Cour.
100 fl. Mon. d'oro = 70 Rthl. Brand. Cour.
12 fl. Nürnb. Münze = 7 Rthl. Brand. Cour.
1 fl. Nürnb. Bco. oder Conr. oder Mon. d'oro = 16 Gr. 10 Pf.
1 fl Nürnb. Münze = 14 Gr.

W) Aus dem schwäbischen Kreise, wo man gleichfalls überall nach Gulden rechnet, bemerken wir die freyen Reichsstädte Augsburg und Ulm.

a) Rechnungsgeld.
Gulden zu 60 Xr., zu 4 Pf. oder 8 Hl.

b) Valuta ist dreyfach

1) Giro wird bey Wechselgeschäften gebraucht, und ist immer 27 pr. C. besser als Courant, folglich
100 Rthl. Giro = 127 Rthl. Cour.

2) Courant ist Conv. Geld.

3) Münze ist die kleine Scheidemünze.

Anm. Für Ulm gilt nur die Valuta Courant.

c) Gold. Ducaten zu 4 fl. 12 Xr. Cour.
Goldgulgen zu 3 fl. — —

d) Silbergeld

Thl.	fl.	Batzen	Krgr.	Xr.	Pf.
1	$1\frac{1}{2}$	$22\frac{1}{2}$	30	90	360

e) Innerer Gehalt.

1 Rthl. Giro = 32,3 *As f. G. = 463,29 As f. S.
1 Rthl. Cour. = 25,4 * — — = 364,8 — —
1 Rthl. Münze = 304 * — —

f) Vergleichung mit Brand. Cour.

9 fl. Augsb. Giro = 8 Rthl. Br. Cour.
100 — — Cour. = 70 — — —
12 — — Münze, ohngefähr 7 Rthl. Br. Cour.
1 fl, Augsb. Giro = 21 Gr. 4 Pf. Br. Cour.
1 fl. — Cour. = 16 Gr. 10 Pf. Br. Cour.
1 fl. — Münze = 14 Gr. Br. Cour.

3) Deutsche Oerter, wo nach Marken gerechnet wird.

X) Man rechnet zwar nur in einer kleinen Gegend von Deutschland die an Dännemark gränzt, und die sich nicht weit über die Grenzen des Herzogthums Holstein erstreckt, nach Marken: indessen liegen in diesem Strich die wichtigen Handelsplätze Hamburg, Lübek, Altona. Wir können diese Oerter zusammen nehmen, weil sie sich gleiches Geldes bedienen. Auch Meklenburg kann hierher gerechnet werden. Man sehe Art. F.

a) Rechnungsgeld.

Mark zu 16 ßl., zu 12 Pf.

Diese drey Sorten bekommen den Zusatz Lübisch, zum Unterschied des Dänischen Geldes, von eben diesem Namen.

b) Valuta ist entweder Species, oder Hamb. Banco, oder Courant, oder leicht Geld.

Species und Bco. sind wenig verschieden. Die erste Valuta besteht aus schweren Constitutionsmäßigen Reichsthalern, in natura, wenn man sie zu drey Mark rechnet. Diese Valuta ist etwas besser als Bco., ihr Werth aber veränderlich. Außer der Banque wird sie ½ pr. C. m. o. w. besser als Bco. geachtet, so daß also im Mittel 100 Rthl. Spec. = 100½ Rthl. Bco. zu rechnen sind.

Banco ist das Geld, was in den Bco. Büchern stehet.

Man nimmt aber in der Hamb. Banque bloß ganze, halbe und viertel Conft. mäßige Reichsthaler an. Jeder Rthl. wird zwar für 3 Mk. gerechnet, aber wenn Geld eingebracht wird, so wird 1 pro mille zu gut geschrieben, d. h. für 1000 Rthl. oder auch Mk, 1001 Rthl. oder Mk. eingeschrieben. Nimmt man aber Geld heraus, so wird Species $1\frac{5}{8}$ pro mille besser gerechnet, d. h. für 1000 die man heraus nimmt, werden $1001\frac{5}{8}$ abgeschrieben. Bey dem allen wird Bco. für eine unveränderliche Valuta gerechnet, und alle Veränderung im Werth, auf Species geschlagen.

Courant ist das gewöhnliche gangbare Silbergeld, welches in Hamburg und Lübek von gleichem Gehalt ist.

Leicht Geld ist eigentlich ein fingirter Werth, den man dem leichten ausländischen Gelde, das in Hamburg roulirt, beylegt. Man rechnet nemlich den Werth dieses Geldes auf Hamburgische Art nach Marken; es verliert aber dasselbe gegen Hamb. Banco gewisse veränderliche Procente. Nach dieser Valuta gelten

1 Rthl. Spec.	—	4	mk.	mit	33	pro Cent m. o w. Verlust gegen Bco. Geld
1 Convent. Thl.	—	4	—	—	42	
1 alter franz. Ecu	—	4	—	—	38	
1 alter Rfl. und fein	$\frac{2}{5}$ —	2	—	—	27	
1 Dukaten	—	$8\frac{1}{4}$	—	—	41	
1 Pistole, Louis, Friederich, Carl, August d'or, und andere Sorten v. gleichem Werthe	15	—	—		40	

c) Gold. Portugaleser, an Gewicht 10 Pf., wovon die neuen ungefähr 75 mk, die alten aber, wenn sie abgenutzt sind, einige mk. weniger gelten..

d) Silbergeld.

Pfund Vlämisch	Rthl.	Wechsel Thaler	Mark	Schilling Vlämisch
1	$2\frac{1}{2}$	$3\frac{3}{4}$	$7\frac{1}{2}$	20

Schilling Lübisch	Groot	Dreyling	Pfennig.
120	240	720	1440

e) Innerer Gehalt.

1 Rthl. Bco. = 35,54 * As f. G. = 528,21 As f. C.
1 Rthl. Courant = 29,1 * — — = 429,18 — —

Die Valuta leicht Geld ist, wie man aus dem was bey b angeführt ist, sehen kann, nicht nur dem Cours nach veränderlich, sondern hat auch bey verschiedenen Geldsorten, verschiedenen Gehalt, daher sich ihr innerer Gehalt gar nicht bestimmen läßt.

f) Vergleichung mit Brandenb. Courant.

100 Rthl. Hamb. Bco. = 152 Rthl. Brand. Cour.
81 Rthl. Hamb. Cour. = 100 Rthl. — —
1 Rthl. Hamb. Bco. = 1 Rthl. 12 Gr. 6 Pf. Br. Cour.
1 Rthl. Hamb. Cour. = 1 Rthl. 5 Gr. 7 Pf. — —

Anmerkung. In Lübek hat die Courant Valuta mit Hamburg völlig gleichen Werth, und beyde Städte sind überhaupt in Ansehung des Geldes nicht verschieden. Auch das Dänische Geld, das in Holstein gebraucht wird, ist von demselben Gehalt. Besonders gilt alles angeführte auch von Altona.

II) Die vereinigten Niederlande.

a) Rechnungsgeld.

Gulden zu 20 Stüber; zu 16 Pfennig.

b) Valuta. 1) Amsterdammer Banco. 2) Cassa oder Courant.

Der unterschied beider Valuten heißt Banco-Agio, und ist veränderlich. Ehemals war Courant um 5 p.C. m.o.w. schlechter als Banco, gegenwärtig aber nur ½ p.C. Daher ist unten bloß vom Cour. der innere Gehalt angegeben.

c) Gold. Neue Ruyders zu 14 fl. Cassa m. o. w.
Dukaten zu 5 fl. 4 St. — — — —

d) Silbergeld.

Pfund flämisch	Reichs Thaler	Gulden.	Schilling flämisch	Stüber
1	2⅔	6	20	120

Groot	Pfennig
flämisch	holländisch
240	1920

e) Innerer Gehalt.

1 fl. Cour. = 199,55 As f. S. = 13,55 As f. G.

f) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 fl. Amst. Cour. = 57 Rthl. 10 Gr. $5\frac{7}{13}$ Pf.

1 fl. " " 13 Gr. $9\frac{3}{13}$ Pf.

III) Die österreichischen Niederlande.

a) Rechnungsgeld.

Gulden zu 20 Stüver, zu 16 Pfennig Brabantisch, auch Pfund zu 20 Schilling, zu 12 Grooten Flämisch.

b) Valuta. 1) Permis oder Wechselgeld, und 2) Courant. Die erste Valuta ist unveränderlich $16\frac{2}{3}$ p. C. besser als Cour., also

100 fl. W. G. = $116\frac{2}{3}$ fl. Cour.

oder 6 fl. W. G. = 7 fl. Cour.

c) Gold.

Souverän oder Severin, seit 1784 zu 7 fl. $19\frac{1}{4}$ St. W. G. oder 9 fl. 6 St. 6 Pf. Cour. Dukaten seit 1784 zu $5\frac{2}{3}$ fl. W. G. oder 6 fl. 6 St. Cour.

d) Silbergeld.

Pfund Vlämisch	Rthl. od. Pattacon	fl.	ßl. vl.	Stüver	Groot od. Pfennig vlämisch
1	$2\frac{1}{2}$	6	20	120	240

Pfennige 1920 — Myten 5760

e) Innerer Gehalt.

1 fl. W. G. = 13,134 As f. G. = 194,98 As f. S.

1 fl. Cour. = 11,258 — — = 167,12 — —

f) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 fl. W. G. = 56 Rthl. 3 Gr.; 1 fl. = 13 Gr. 6 Pf.
100 fl. Cour. = 48 — $2\frac{1}{2}$ — ; 1 fl. = 11 — 6 —

IV) Die Schweiz.

Man rechnet zwar fast in der ganzen Schweiz nach Gulden, zu 60 Xr., zu 8 Heller; demohngeachtet ist es nicht möglich, das dasige Münzwesen unter einige wenige allgemeine und einfache Gesichtspunkte zu bringen: theils weil außer den eigentlichen Landesmünzen auch das Geld aller benachbarten Länder dort cirkulirt; theils weil der Werth des Rechnungsgulden gegen die wirklichen Münzen, in verschiedenen Gegenden verschieden ist, so daß z. B. der franz. Laubthaler in Basel $2\frac{1}{3}$ fl., im Graubünder-Lande aber $3\frac{3}{8}$ fl. gerechnet wird; theils endlich, weil außer fl., Xr. und Heller an mehreren Orten noch andere Rechnungsarten üblich sind. Wir wollen indessen versuchen die Sache so einfach als möglich darzustellen.

A) Im Canton Zürich.

a) Rechnungsgeld.
Gulden, zu 60 Xr., zu 8 Heller; oder auch
Gulden, zu 40 Schilling, zu 12 Heller.

b) Silber- und anderes Rechnungsgeld.

mk. Silber	Rthl.	fl.	Pfund-Haller	Batzen	Schillinge	Xr.	Rappen
1	$1\frac{2}{3}$	$2\frac{1}{2}$	5	40	100	150	400

Angster od. Pf. Haller
600 1200

c) Innerer Gehalt. Ein Laubthaler hält 547,81 As f. S. und gilt in Zürich $2\frac{1}{2}$ fl.; daher ist
1 fl. = 219,1 As f. S.

d) Vergleichung mit Brand. Geld.
100 fl. Zürchisch = 63 Thl. 1 Gr. $6\frac{4}{7}$ Pf.
1 fl. — = 15 — $1\frac{3}{5}$ —

B) In den Cantons Basel, Bern, Freyburg, Solothurn; im Bisthum Basel, in der Stadt Biel, im Walliser-Lande.

a) Rechnungsgeld.

Gulden, zu 60 Xr. zu 8 Heller.

In Bern rechnet man auch nach

Kronen, zu 25 Batzen, zu 4 Xr.
Livres, zu 20 Sols, zu 12 Deniers.
Livres, zu 10 Batzen, zu 4 Xr.

b) Die Valuta ist an allen diesen Orten einfach, nemlich Courant; nur im Canton Basel ist noch die Valuta Wechselgeld üblich, welche sich gegen Courant so verhält, daß 10 fl. Courant = 9 fl. Wechselgeld sind.

c) Silber- und andere Rechnungs-Münzen.

Rthl.	Krone	fl.	Liv.	Batzen	Sols	Xr.
1		$1\frac{1}{5}$	2	3	30	60	120

Deniers	Heller
720	960

Außer diesen Münzen sind im Canton Basel noch üblich Pfunde, von denen $2\frac{1}{2}$, Plappharts, von denen $53\frac{1}{3}$ und Albus, von denen 60 auf einen Thaler gehn.

In Bern und den übrigen genannten Orten braucht man auch Pfunde, deren aber 4 auf den Thaler gehn.

d) Innerer Gehalt. Der Werth des Rechnungsgulden ist an allen genannten Orten gleich, und bestimmt sich dadurch, daß der Laubthaler zu $2\frac{2}{3}$ fl. gerechnet wird. Daraus folgt

1 fl. = 205,4 As f. S.

Dieß mit c) verglichen, giebt den Innhalt der Kronen und

Livres, nemlich

1 Livre = 138,94 As f. S.
1 Krone = 344,34 — —

e) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 fl. = 59 Rthl. 2 Gr. 11 Pf.;
1 fl. = 14 — 2 —

C) In folgenden Gegenden: 1) in dem Canton Lucern, 2) in den Cantons Schweiz, Unterwalden, Uri, 3) im Canton Glaris, 4) im Canton Zug, 5) in den Canton Schafhausen und Appenzell, desgleichen in den Landvoigteyen Rheinthal, Sorgaus und Thurgau, in der Grafschaft Toggenburg und und in der Stadt und Abtey St. Gallen sind zwar einerley Rechnungsmünzen üblich, die aber bey jeder dieser 5 Nummern einen andern Zahlwerth haben.

a) Rechnungsgeld.

Gulden, zu 60 Xr., zu 8 Heller.
Gulden, zu 40 Schilling, zu 12 Heller.

b) Außer diesen sind noch folgende Rechnungs-Münzen üblich:

Krone	fl.	Pfund	Batzen	Xr.	Rappen
1	2	4	30	120	320
		Angster	Heller		
		480	960		

c) Innerer Gehalt.

1) In Lucern wird der Laubthaler zu 3 fl. gerechnet; daher 1 fl. = 182,58 As f. S.

2) In Schweitz u. s. w. rechnet man ihn zu $3\frac{1}{4}$ fl.; daher 1 fl. = 168,56 As f. S.

3) In Glaris rechnet man ihn zu $2\frac{5}{8}$ fl., daher 1 fl. = 208,69 As f. S.

4) In Zug rechnet man ihn zu $3\frac{1}{8}$ fl., daher 1 fl. = 175,30 As f. S.

5) In Schafhausen ꝛc. rechnet man ihn zu $2\frac{3}{4}$ fl.; daher 1 fl. = 199,21 As f. S.

d) Vergleichung mit Brand. Geld.

1) Lucern	100 fl.	=	52	Rthl.	13	Gr.	$2\frac{2}{10}$	Pf.;
	1 fl.	=			12	—	$7\frac{1}{2}$	—
2) Schweitz ꝛc.	100 fl.	=	48	—	12	—	5	—
	1 fl.	=			11	—	$7\frac{3}{4}$	—
3) Glaris	100 fl.	=	60	—	1	—	$7\frac{1}{5}$	—
	1 fl.	=			14	—	5	—
4) Zug	100 fl.	=	50	—	10	—	$11\frac{2}{5}$	—
	1 fl.	=			12	—	$1\frac{1}{3}$	—
5) Schafhausen	100 fl.	=	57	—	8	—	$1\frac{1}{8}$	—
	1 fl.	=			13	—	$9\frac{1}{7}$	—

D) In Bindten, oder dem Graubünder-Lande.

a) Rechnungsgeld.

Gulden zu 15 Batzen, oder
Gulden zu 70 Bluzger.

b) Silber- und andere Rechnungs-Münzen.

Reichs-Gulden	Schweitzer-Gulden	Schweitzer-Batzen	Reichs Xr.
1	$1\frac{2}{7}$	$19\frac{2}{7}$	60

Schweitzer Xr.	Bluzger
$77\frac{1}{7}$	90

c Innerer Gehalt.

1 fl. = 162,31

d) Vergleichung mit Brand. Gelde.

100 fl.	=	46	Rthl.	17 Gr.	$2\frac{2}{3}$ Pf.;
1 fl.	=	11	—	$2\frac{1}{2}$	—

E) In der Republik Genf.

a) Rechnungsgeld.

Livres, zu 20 Sols, zu 12 Deniers, oder
Gulden, zu 12 Sols, zu 12 Den. petite Monnoïe.

b) Silber- und andere Rechnungs-Münzen.

Ecu	Liv. Cour.	Gulden Genfer	Sols Cour.	Genfer	Genfer Quart
1	3	$10\frac{1}{2}$	60	120	504

Deniers Cour.	Genfer
720	1512

c) Innerer Gehalt.

1 Livre = 150,86 As f. S.
1 fl. = 43,10 As f. S.

d) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 Liv.	=	43 Rthl.	9 Gr.	$1\frac{1}{2}$	Pf.
1 Liv.	=		10 —	5	—
100 fl.	=	12 —	9 —	$9\frac{1}{5}$	—
1 fl.	=		2 —	$9\frac{1}{5}$	—

F) In Neufchatel.

a) Rechnungsgeld.

Livres, zu 20 Sols, zu 12 Deniers tournois de Neufchatel.

Livres, zu 12 Sols oder Gros, zu 12 Den. foibles.

b) Silber- und andere Rechnungs-Münzen.

Livre		Sols		Deniers	
tour.	foibl.	tour.	foibl.	tour.	foibl.
1	$2\frac{1}{2}$	20	30	240	360

c) Innerer Gehalt.

1 Livre tourn. = 136,95 As f. S.
1 Livre foibl. = 54,78 — —

d) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 Liv. tourn.	=	39 Thl.	10 Gr.	$\frac{1}{2}$	Pf.;
1 Liv.	=		9 —	$5\frac{1}{2}$	—
100 Liv. foibl.	=	15 —	18 —	5	—
1 Liv.	=		3 —	$9\frac{1}{2}$	—

Ueber die Schweitzer Goldmünzen,

Die Helvetische National Goldmünze, sind Dukaten, welche dem Gewicht und innern Gehalt nach ziemlich gleich seyn sollen; nemlich

Gewicht, 72 6 As, und Gehalt 23 Karat 4 bis 6 Grän. Hieraus folgt, daß

1 Dukaten = 70,6 bis 71,1 As f. G.

Das Verhältniß zwischen Gold und Silber ist zwar nicht

durch die ganze Schweitz völlig gleich, doch kann man es im Mittel auf $14\frac{1}{2} : 1$ setzen.

Hieraus würde folgen, daß

1 Dukaten = 1024 bis 1031 As f. S.

Da nun oben der Werth jeder Rechnungsmünze gleichfalls in As f. S. angegeben ist, so läßt sich leicht berechnen wie viel der Dukaten in jeder Valuta gelten sollte. Da sich indessen der wirkliche Zahlwerth nicht immer genau nach dem Gehalt richtet, so setze ich noch hinzu, was ich von bestimmten Angaben des Zahlwerthes in Gerhardts Contoristen, und der neuesten Ausgabe von Nelkenbrechers Taschenbuch gefunden habe.

In Zürich wird 1 Duk. gerechnet zu 4 fl. 18 Xr.
In Basel — — — — 5 — — —
In Lucern — — — — 4 — 18 —

So steht wenigstens so wohl im Contoristen, als im Taschenbuche; kann aber bey dem großen Unterschiede der Züricher und Lucernen *Valute nicht* richtig seyn. Ich vermuthe 5 fl. *18* Xr.

In Genf münzt man Pistolen, deren Zahlwerth seit
1752, 10 Livre Genfer Courant
oder 35 fl. Genfer Münze
oder $16\frac{2}{3}$ französische Livres ist.
In Neufchatel gilt der Duk. $7\frac{2}{3}$ Liv. tourn.

V) Dänemark und Norwegen.

a) Rechnungsgeld.
Reichsthaler, zu 6 Mark, zu 16 Schilling Dänisch.

b) Valuta.

1) Species, welches die Valuta der neuen Bank ist;
1 mk. f. S. = $9\frac{1}{4}$ Thl. Species.

2) Dänisch Courant.
1 mk. f. S. = $11\frac{1}{3}$ Thl. Dän. Cour.

c) Gold. Species Dukaten zu $14\frac{3}{4}$ Mark Dänisch
Courant — zu 12 — —

d) Silber.

Reichs Thaler	Schlechte Thaler	Orts	Mark Dän.	Schilling Dän.
1	$1\frac{1}{2}$	4	6	96

Fyrken	Witten	Pfennig Dän.
192	288	1152

e) Innerer Gehalt.

1) 1 Thl. Species = 525,84 As f. S. = 34,76 As f. G.

2) 1 Rthl. Dän. Cour. = 429,18 As f. S. = 28,37 As f. G.

f) Vergleichung mit Brand. Gelde.

1) 100 Thl. Species = 151 Thl. 8 Gr. 5 Pf. Br. C.
1 — — = 1 — 12 — 4 —

2) 100 — Dän. = 123 — 12 — $8\frac{3}{5}$ —
1 — — = 1 — 5 — $7\frac{3}{4}$ —

VI) Schweden.

Seit dem Jahre 1777 hat das Münzwesen in Schweden eine gänzliche Reform gelitten. Man rechnete vordem nach Dalern, zu 32 Oer, zu 4 Oerlein, und zwar in der doppelten Valuta, Silber und Kupfer, wovon die Silber-Valuta gerade 3mal besser war als Kupfer. Jetzt aber ist nicht nur diese Art zu rechnen, sondern auch fast alle ehemals gebräuchliche Münzsorten abgeschafft. Die jetzige Einrichtung des Münzwesens ist aus dem folgenden zu ersehen. Doch ist zu bemerken, daß bey No. d auch die vornehmsten alten Münzsorten eingeschoben sind, um sie mit den neuen vergleichen zu können.

a) Rechnungsgeld.

Reichsthaler Species, zu 48 Schilling, zu 12 Rundstück oder Pfennig oder Oere.

b) Valuta. Schwedisch Courant.

c) Gold. Dukaten, zu 1 Rthl. 46 ßl, m. o. w.

d) Silbergeld.

Rthl. Spec.	Daler Silber	Daler Kupfer	mk. Silber	ßl.	mk. Kupfer
1	6	18	24	48	72
	Oere Silber oder Slenten	Oere Kupfer	Oerlein Silber		Oerlein Kupfer
	192	576	768		2304

e) Innerer Gehalt.

1 Rthl. = 36,1 *As f. G. = 534 As f. S.

f) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 Rthl. schw. = 153 7/10 Rthl. Br. Cour.
1 Rthl. schw. = 1 Rthl. 12 Gr. 11 Pf.

VII) Polen.

a) Rechnungsgeld.

Gulden (Zloti), zu 30 Groschen (Groß), zu 18 Pfennig.

b) Valuta. Polnisch.

c) Gold. Seit 1787 Dukaten zu 18 Gulden.

d) Silber- und andere Rechnungs-Münzen.

Thaler	Gulden	Szestack	Groß
1	6	30	18
	Czelong od. Schilling	Pfennige.	
	540	3240	

e) Innerer Gehalt.

1 fl. Poln. = 58,25 As f. S. = 3,97 As f. G.

f) Vergleichung mit Brand. Gelde.

100 fl. Poln. = 16 Thl. 18 Gr. 5 Pf.;
4 Gr. 0,3 Pf.

VIII) Rußland.

a) Rechnungsgeld.

Rubel, zu 100 Kopeken, oder auch
Rubel, zu 10 Griwen, zu 10 Kopeken.

b) Valuta. 1) Russisch Courant; 2) Kupfergeld, od. Banknoten.

c) Gold. Imperiale zu 10 R. Cour. 16* R. in Banknoten.
Dukaten zu $2\frac{1}{2}$ — — ; 4* — — —
Auch werden doppelte, ganze und halbe Rubel in Gold gemünzt; doch sind sie nicht häufig.

d) Silbergeld.

Rubel	Griwen	Altins	Grosz	Kopeken
1	10	$33\frac{1}{3}$	50	100

Denuschka	Poluschka
200	400

e) Innerer Gehalt.
1 Rubel Cour. = 374,15 As f. S. = 27,95 As f. G.
1 Rubel Kupf. = 234* ; ; ; = 17,5* ; ; ;

f) Vergleichung mit Brand. Geld.
100 Rub Cour. = 107 Thl. 16 Gr. $7\frac{1}{4}$ Pf.;
1 Rub. Cour. = 1 Thl. 1 Gr. $10\frac{3}{20}$ Pf.
100 Rub. Kupf. = 67 Thl. 7 Gr. $4\frac{3}{5}$ Pf.
1 Rub. Kupf. = — — 16 Gr. $1\frac{4}{5}$ Pf.

IX) Groß-Britannien.

A) England und Schottland.

a) Rechnungsgeld. Pfund, zu 20 Schill., zu 12 Pf. Sterl.

b) Valuta. Sterling.

c) Gold. Guinea, zu 21 Schilling.

d) Silbergeld.

Pound	Marks	Angels	Nobles	Crowns	Shellings
1	$1\frac{1}{2}$	2	3	4	20

Groats od. Sixpences	Pence	Halfpence od. Hapennys	Farthing
60	240	480	960

e) Innerer Gehalt.
1 Pf. St. = 2286,5 As f. S. = 149,0 As f. G.

f) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 Pf. St. = 658 Thl. 2 Gr. 10 Pf.;
1 Pf. St. = 6 Thl. 13 Gr. $11\frac{3}{5}$ Pf.

B) Irland

a) Rechnungsgeld. Pfund, zu 20 ßl. zu 12 Pf. Irisch.

b) Valuta. Irisch. Sie ist um $8\frac{1}{3}$ p. C. schlechter als die englische Valute Sterling.

c und d) Gold und Silber ist wie in England, nur gelten die englischen Münzen in irischer Valuta mehr, als in englischen. Nach der bey a) angegebenen Vergleichung kann man setzen, daß 12 Stücke englisch, allezeit 13 Stücke Irisch machen. Daher gilt eine englische Guinea in Irland 22 ßl. 9 Pf. Irisch, und so die übrigen Münzen.

e) Innerer Gehalt.

1 Pf. Irisch = 2094,0 As f. S. = 137,54 As f. G.

f) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 Pf. Irisch = 607 Thl. 11 Gr. $10\frac{2}{13}$ Pf.;
1 Pf. Irisch = 6 Thl. 1 Gr. $9\frac{3}{5}$ Pf.

X) Frankreich.

a) Rechnungsgeld. Livres, zu 20 Sols zu 12 Deniers tournois.

b) Valuta. Französisch.

c) Gold. Louis d'or, die man in Deutschland unter dem Namen Schild-Louis d'or und Louis neuf kennt, zu 24 Livres.

d) Silbergeld.

Ecu oder halbe Laubthaler	Liv.	Sols d'or tournois	Sols d'or	Deniers tourn.	Deniers d'or tourn.
1	3	20	60	240	720.

Die Deniers d'or heißen auch Liards.

e) Innerer Gehalt.

1 Livre tourn. = 91,3 As f. S. = 5,97 As f. G.

f) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 Liv. tourn. = 26 Thl. 6 Gr. $8\frac{1}{4}$ Pf.;
1 Liv. = 6 Gr. $3\frac{3}{4}$ Pf.

XI) Spanien.

Das Münzsystem in Spanien ist zwar eben nicht einfach, ber doch auch bey weiten nicht so verwickelt, als es Cruse, icard, Nelkenbrecher und andere machen, bey welchen an fast auf allen Seiten widersprechende Angaben finden kann. Die Verwirrung ist aus verschiedenen Ursachen entstanden:) aus der Menge von verschiedenen Rechnungsarten und Rechungsmünzen, die ehemals, und zum Theil noch jetzt in Spaien gebräuchlich sind. 2) Aus den vielerley Namen, die man ft einer einzigen Münze in und außer Spanien giebt; z. B. Peso duro, pesu fuerte, peso efetivo, Piastre ꝛc. und umgekehrt, aus den ähnlichen Namen die unterschiedene Sorten haben, z. B. Real de plata, und Real de pla: ta columnaria oder Mexicana. 3) Aus der Verwechselung des eigentlichen spanisch e, mit dem spanisch Westindischen oder Mexicanischen Gelde, welches in Spanien an mehreren Orten in Rechnung und Handel stark gebraucht wird.

Die folgende Tabellen enthalten die neuesten Bestimmungen der Münzen, so wie sie in einer Verordnung vom 17. Julii 1779 festgesetzt sind.

Wir machen aber hier zwey Abtheilungen, davon die erste die eigentlich spanischen, und die andere die spanisch westindischen, oder mexicanischen Münzen begreift. Uebrigens halten wir es für bequemer, bey diesem Artikel die Tabellen etwas anders als bey den übrigen Ländern einzurichten.

A) Die eigentlichen spanischen Münzen.

a) Rechnungsgeld. Fast in ganz Spanien rechnet man jetzt nach Realen zu 34 Maravedis.

Dieser Real, der auch sonst Real de Vellon, und Real courant heißt, ist eine wirkliche in Kupfer und Silber vorhandene Münze. Maravedi aber ist jetzt eine fignirte, und zwar die kleinste spanische Münze.

An einigen Orten wird nach Libras, zu 20 Sueldos zu 12 Dineros gerechnet. Allein selbst die Libra ist an verschiedenen Orten von verschiedenem Werth, und hat zu Realen meistens ein unschickliches Verhältniß. Wir können aber diese Rechnungsmünzen mit desto größeren Recht weglassen, weil sie jetzt an wenig Orten gebraucht werden. Wer mehr davon wissen will, kann Crusens Contoristen, und Nelkenbrechers Taschenbuch nachsehen. Am vollständigsten findet man die Erklärung des Spanischen Münzwesens, in des Herrn Gerhards Contoristen, und in der von ihm besorgten neuesten Ausgabe des Nelkenbrecher.

b) Valuta. Spanisch.

Die Valuta Mexicanisch folgt unter B. Andere Valuten werden jetzt wenig gebraucht.

c) und d) Gold- Silber- Kupfer- und eingebildete Münzen.

Wirkliche Münzen.

	Maravedi	Réal.	Piastre oder Peso duro
Kupfer.			
Ochava — — —	2	—	—
Quarto — — —	4	—	—
Dos Quarto — —	8	—	—
Réal. Réal de Vellon (d. i. Kupfer-Real,) oder Réal courant —	34	1	—
Silber.			
Réal — — —	34	1	—
Réal de Plata (Silber-Real) —	68	2	—
Peseta — — —	136	4	—
Demi peso duro — —	340	10	—
Peso duro, fuerte, oder Piastre	680	20	1
Gold.			
Peso duro de oro — —	680	20	1
Demi Doblon de oro oder Escudo de oro (Ecu d'or) — —	1360	40	2
Doblon de oro, Pistole —	2720	80	4
Doblon de a quarto (d. i. v. 4 Escudos)	5440	160	8
Doblon de a ocho, oder Quadrupel	10880	320	16

Fingirte Münzen.

Kupfer.			
Maravedi — — —	1	—	—
Silber.			
Ducado de plata — —	340	10	—
Ducado, oder Ducado de Vellon. Wechsel-Ducado — —	374	11	—
Peso sencillo. Wechsel-Piaster, auch Courant-Piaster — —	512	15	—
Escudo al Sol — —	1088	32	$1\frac{1}{5}$
Gold.			
Doblon seneillo. Wechsel-Pistole	2040	60	3

e) Innerer Gehalt.

1 Real (de Vellon) = 1,6 As f. G. = 25 As f. S.
1 Piastre (Peso duro) = 32 As f. G. = 500 As f. S.
1 Pistole (Doblon) = 128 As f. G. = 2000 As f. S.

f) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 Real (de Vell.) = $7\frac{7}{15}$ Rthl Brand Cour.
und 1 Real = 1 Gr. 8 Pf.

100 Piastres = 143 9/10 Rthl. Brand. Cour.
1 Piastre = 1 Rthl. 10 Gr. 6 Pf.
100 Pistolen = 507 4/5 Rthl. Br. Gold. = 575 2/3 Rthl. Br. C.
1 Pist. = 5 Rthl. 18 Gr. 2 Pf. Br. Cour.

B) Die spanisch-westindischen oder mexicanschen Münzen.

a) Rechnungsgeld.

Real zu 34 Maravedi

Diese beyde Münzen sind mit denen bey A angeführten, gleiches Namens, nicht zu verwechseln. Der Real, von dem wir hier reden, ist weder mit dem Real de Vellon, noch de Plata der spanischen Münze einerley, sondern besser als beyde. Er heißt zum Unterschiede Real de Plata Mexicana, auch Real de Plata columnaria (vom Gepräge); und durch diese Zusätze Mex. und col. werden überhaupt die westindischen Münzen von den spanischen unterschieden.

b) Valuta. Mexicanisch

2 Reales de Pl. mex. = 5 reales de Vell. Eben so auch
2 Mar. col. oder mex. = 5 Mar. cour.

c) und d) Gold- und Silbermünzen.

	Mexicanische Valuta.			Spanische Valuta.		
	Marav. col.	Réal col.	Piastre	Marav. courant.	Réal.	Piastre
Maravedi column.	1	—	—	2 1/2	—	—
(Réal de Vell. spanisch)	13 3/5	—	—	34	1	—
Réal de Vellon col.	17	—	—	42 1/2	1 1/4	—
Réal de Plata col.	34	1	—	85	2 1/2	—
Peseta column.	68	2	—	170	5	—
4 Real Stück	136	4	—	340	10	—
Piastré Peso fuerte oder Escudo	272	8	1	680	20	1
(Gold.						
Escudo doble	544	16	2	1360	40	2
Doblon de oro (Pistole)	1088	32	4	2720	80	4
Doblon de a quarto	2176	64	8	5440	160	8
Doblon de a ocho	4352	128	16	10880	320	16

Wer diese Tabelle mit der vorigen vergleicht, wird bald bemerken, daß das mexicanische Geld, bloß in den ersten Silbermünzen, nemlich Maravedi, Real de Vellon, Real de Plata, und Pesata vom spanischen Gelde verschieden ist. Vom 4 Real-Stück aber, (welches in der vorigen Tabelle Demi peso duro heißt), sind die spanischen und mexicanischen Münzen einerley.

e) Innerer Gehalt.

1 Réal de pl. col. = 4 As f. G. = 62,5 As f. S.
Piastre und Pistole sind wie in Spanien.

f) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 Réal de pl. col. = 18 Rthl Brand. Cour.
also 1 Réal de pl. col. = 4 Gr. 3 Pf.

XII) Portugall.

a) Rechnungsgeld.

Man bedient sich in Portugall der einfachsten Rechnungsart, denn man rechnet alle Summen nach einer einzigen kleinen Münze, die man Rées nennt. 1000 davon nennt mān ein Millerèes.

b) Valuta. Portugisisch.

c) Gold. Seit 1722.

1 Dobraon	= 12800 Rees
$\frac{1}{2}$ Dabraon oder Moe d'or	= 6400 —
$\frac{1}{4}$ dito oder $\frac{1}{2}$ Moe d'or	= 3200 —
$\frac{1}{8}$ dito oder 1 Escudo	= 1600 —
$\frac{1}{16}$ dito oder $\frac{1}{2}$ Escudo	= 800 —
Crusado Velho (alt)	= 400 —

d) Silbergeld.

Crusado novo	Crusado velho	Testoen	Réal	Vintems	5 Rées
1	$1\frac{1}{5}$	$4\frac{4}{5}$	12	24	480

e) Innerer Gehalt.

1 Millerées = 42,75 As f. G. = 563,52 As f. S.

f) Vergleichung mit Brand. Geld.

1 Millerées = 1 Thl. 14 Gr. $11\frac{1}{5}$ Pf.

1 Rèe beinahe $\frac{1}{2}$ Pf. (0,467 Pf.)

XIII) Italien.

Da Italien aus vielen Staaten zusammengesetzt ist, so müssen wir die Münzen dieser Staaten einzeln durchgehen.

1) Oberitalien.

A) In den Ländern die unter sardinischer Hoheit stehen, nemlich Savoyen, Piemont, (worin besonders Turin zu merken) Montferat, und die Insel Sardinien.

a) Rechnungsgeld.

Lira, zu 20 Soldi, zu 12 Denari.

b) Valuta. Savoyisch.

c) Gold. Doppien zu 24 Lire

Zechinen zu 9 Lire 10 Soldi.

d) Silbergeld.

Scudo novo	Ducaton	Lira	Ottavo	Florin	Soldo
1	$1\frac{1}{11}$	6	8	10	120

Quatrino 480

Denaro 1440

e) Innerer Gehalt.

1 Lira = 7,16 As f. G. = 110,5 As f. S.

f) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 Lire = 31 Thl. 19 Gr. $3\frac{4}{5}$ Pf. Br. Cour.

1 Lire = 7 Gr. $7\frac{3}{5}$ Pf.

B) Genua.

a) Rechnungsgeld.

Lira, zu 20 Soldi, zu 12 Denari.

b) Es sind hier vier Valuten üblich.

1) Ban-

1) Banco-Valuta, in der St. Georgen-Bank.

2) Fuori Banco, oder Moneta buona; außer der Bank, bei Banquiers, Kaufleuten, Wechselzahlungen; ist 25 p. C. schlechter als Banco-Val., so daß 100 Bco. = 125 Mon. buona.

3) Moneta abusiva, beym Waarenhandel, ist veränderlich, und 1 bis 4 p. C. schlechter als Mon. buona.

4) Valuta permesso, bey Zollabgaben, ist 15 p. C. besser als Mon. buona, und $8\frac{16}{23}$ p. C. schlechter als Banco. Also

100 Bco. = $108\frac{16}{23}$ Val. perm.
100 Val. perm. = 115 Mon. buona.

c) Gold. Doppia 23 L. 12 S. corr.
Scudo d'oro 11 — 16 — —
Zecchino 13 — 10 — —

d) Silbergeld

Lira corr. od. Madonina	Caboletto	Buttala	Parpaïola	Soldo
1	3	5	10	20

Da otto	Quatrino	Denaro
30	60	240

Noch sind zu merken:

1 Lira od. 20 S. od. 240 Den. W. G. = 25 Soldi corr.
1 Giorgino — — = 26 — —
1 St. Giam Batista (Joh. Bapt.) oder Scudo Wechsel G. = 5 Lire = 100 — —
1 Pezza (Piastre) W. G. = 115 — —
1 Geovina od. Scudo d'Argento = 190 — —

e) Innerer Gehalt.

1 Lira di Bco. = 97,770 As f. S. = 6,67 As f. G.
1 Lira di Perm. = 89,330 " " = 6,15 " "
1 Lira di M. 6. = 77,675 " " = 5,35 " "

f) Vergleichung mit Brand. Gelde.

100 Lira di Bco. = 28 Thl. 3 Gr. $4\frac{3}{5}$ Pf.; 1 L. = 6 Gr. 9 Pf.
100 ‛ di Perm. = 25 ‛ 17 ‛ 1 ‛ $\frac{1}{5}$ 1 ‛ = 6 ‛ 2 ‛
100 ‛ di M. b = 22 ‛ 8 ‛ $6\frac{4}{5}$ ‛ $\frac{1}{5}$ 1 ‛ = 5 ‛ $4\frac{3}{5}$ ‛

C) Im Mailändischen.

a) Rechnungsgeld. Lira, zu 20 Soldi, zu 12 Denari.

b) Valuta. 1) Corrente, und 2) Imperiale oder Wechselgeld 106 di Val. imp. = 150 di Val. corr.

c) Gold. Souverains zu 45 Lire corr.

Neue Mail. Pistolen	—	25	—	3 Sol. corr.
Mail. Zechinen, nebst ungar. und kaiserl. Dukaten	—	15	—	4 — —

d) Silbergeld.

Lira	Soldi	Denari
1	20	240

Ferner 1 Ducatone = 8 L. 12 S. corr.
1 Felippo = 7 — 10 —
1 Scudo W. G. = 5 — 17 —
1 Scudo corr. = 5 — 15 —

e) Innerer Gehalt.

1 Lira imp. = 101,97 As f. S. = 6,68 As f. G.
1 Lira corr. = 72,06 As f. S. = 4,72 As f. G.

f) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 Lire imp. = 29 T. 8 G. $4\frac{7}{10}$ P.; 1 Lira = 7 G. $\frac{1}{5}$ P.
100 L. corr. = 20 T. 17 G. $9\frac{2}{5}$ P.; 1 Lira = 4 G. $11\frac{1}{4}$ P.

D) Im Venetianischen.

a) Rechnungsgeld. 1) Gewöhnlich rechnet man nach Lire, zu 20 Soldi, zu 12 Denari di Lira; 2) Banquiers und Großhändler führen gewöhnlich Rechnung, in Ducati, zu 24 Grossi, zu 12 Denari di Ducato; 3) die venetianische Bank führt Rechnung, in Lire grossi, zu 20 Soldi grossi, zu 12 Denari grossi.

b) Valuta.

1) Die gewöhnliche Valute ist Moneta piccola corrente.

2) Die Valuta Banco, ist nicht die Valute der Bank, sondern die, worin Wechsel geschlossen werden.

3) Valuta di Grosso, ist die eigentliche Valute der Bank. Vor 1750 hatte man eine andere Cour. Valuta, die jetzt nicht mehr gebräuchlich ist. Es waren aber 17 Stück alt Cour. = 22 Stück neu Cour. oder piccola.

Uebrigens ist das Verhältniß der drey üblichen Valuten folgendes:

1 Lira grossa = 62 Lire Banco = 96 Lire piccoli.

Die Ducati werden als Rechnungsmünze in den beiden ersten Valuten gebraucht. Ihr Verhältniß gegen die Lira ist so, daß 5 Ducati = 31 Lire.
sowohl Banco, als piccola.

c) Goldmünzen.

Doppia oder Pistole,	zu 38	Lire picc.
Zecchino	22 —	—
Ducato d'oro	14 —	—

d) Silbermünzen.

Scudo della Croze	12 2/5	Lire picc.
Ducatone oder Giustino	11 —	—
Tallero	10 —	—
Ducato Veneto	8 —	—
Ossella.	3 1/10 —	—
Liranza	1 1/2 —	—

e) Kupfermünzen.

Soldo	12	Den. picc.
Bigattino	6 —	—
Bessono	3 —	—

f) Innerer Gehalt.

1 Lira grossa =	4707,07	As f. S. =	317,45 As f. G.
1 Duc. Bco. =	470,71	=	31,74
1 Lira Bco. =	75,92	=	5,12
1 Duc. picc. =	304,00	=	20,50
1 Lira picc. =	49,03	=	3,31

g) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 Lire grossi = 1354 Thl. 19 Gr. 10 Pf.
1 Lira grossa = 13 Thl. 13 Gr. 2 Pf.

100 Lire Banco	=	135 Thl.	11 Gr.	7 Pf.
1 Duc. Bco.	=	1 Thl.	8 Gr.	$6\frac{1}{5}$ Pf.
100 Lire Banco	=	21 Thl.	20 Gr.	$5\frac{1}{3}$ Pf.
1 Lira Banco	=	—	5 Gr.	3 Pf.
100 Duc. picc.	=	91 Thl.	16 Gr.	—
1 Duc. picc.	=	—	22 Gr.	—
100 Lire picc.	=	14 Thl.	2 Gr.	$8\frac{1}{3}$ Pf.
1 Lira picc.	=	—	3 Gr.	$4\frac{2}{3}$ Pf.

E) Die Herzogthümer Parma und Piacenza.

a) R. G. Lira zu 20 Soldi, zu 12 Denari.

b) Valuta. Corrente di Parma.

c) Gold. Alte Doppien, zu 72 Lir. 12 Soldi.
Neue, vor Oct. 1785, zu 93 — 10 —
Neue, nach Oct. 1785, zu 90 — : —
Zecchinen zu 45 — : —

d) Silbergeld. Ducati, zu 21 Lire : Soldi.
alte Scudi, zu 8 — 8 —
Testone, zu 6 — 6 —
Stücke von 40, 20, 10, 5 Soldi.

e) Innerer Gehalt.
1 Lira di Parma = 23,09 As f. S. = 1,57 As f. G.

f) Vergleichung mit Brand. Geld.
100 L. di Parma = 6 T. 15 G. $6\frac{1}{3}$ P.; 1 L. = 1 Gr. $7\frac{1}{3}$ Pf.

F) Im Herzogthum Modena.

a) Rechnungsgeld. Lira zu 20 Soldi, zu 12 Den.

b) Valuta. 1) di Modena. 2) di Regio.
2 Stück di Modena = 3 St. di Regio.

c) Gold. Doppia = 51 Lir. d. Mod. = $76\frac{1}{2}$ Lir. d. Reg.
Scudino = 9 : : : = $13\frac{1}{2}$: : :

d) Silber. Ducatoni = $17\frac{2}{3}$ Lir. d. Mod. = $26\frac{1}{2}$ L. d. R.
Scudi = 15 : : : = $22\frac{1}{2}$: : :
Ducati = 8 : : : = 12 : : :
Neue Scudi = 5 : : : = $7\frac{1}{2}$: : :
Lire di Mod. = 1 : : : = $1\frac{1}{2}$: : :
Lire di Reg. = $\frac{2}{3}$: : : = 1 : : :

e) Innerer Gehalt.
1 Lir. di Mod. = 35,00 As f. S. = 2,43 As f. G.
1 Lir. di Regio = 23,34 " " " = 1,62 " " "

f) Vergleichung mit Brand. Geld.
100 Lir. di Mod. = 10 T. 1 G. 9¾ P.; 1 L. = 2 G. 5 P.
100 Lir. di Reg. = 6 — 17 — 2½ —; 1 L. = 1 — 7½ —

G) Die Republik Lucca.

a) R. G. Lira, zu 20 Soldi, zu 12 Den. di Lira; auch nach Scudi d'oro zu 20 Soldi, zu 12 Den. di Scudo. Es ist aber 1 Scudo d'oro = 7½ Lire.

b) Valuta. Corrente di Lucca.

c) Gold. Doppien zu 22 Lire.

d) Silber. Scudi zu 7½ Lire. Stücke von 20, 12, 6 und 3 Soldi.

e) Innerer Gehalt.
1 Lira di Lucca = 71,32 As f. S. = 4,92 As f. G.

f) Vergleichung mit Brand. Geld.
100 L. di Lc. = 20 T. 12 G. 8 P.; 1 L. = 4 G. 11⅛ P.

2) Mittel-Italien.

H) Im Toskanischen. (Florenz, Livorno.)

a) Rechnungsgeld.
Lire, zu 20 Soldi, zu 12 Den. di Lira.
Ducati, zu 20 Soldi, zu 12 Den. di Ducato.
Scudi d'oro, zu 20 Soldi, zu 12 Den. d'oro.
Pezzas da otto reali, zu 20 Soldi, zu 12 Den. di Pezza
Das Verhältniß der Haupt-Rechnungsmünzen ist so, daß
1 Ducato = 7 Lire.
1 Scudo d'oro = 7½ Lire.
1 Pezza = 5¾ Lire.

b) Valuta. 1) Moneta buona. 2) In Livorno bedienen sich die Wechsler einer andern Valuta, welche Moneta lunga heißt. Sie stehen so gegen einander, daß 23 Lire Moneta buona, = 24 Lire Moneta lunga.

c) Gold.

Zecchino gigliato 13⅓ Lire Mon. buona.
Ruſponi (3 Zecch.) 40 — — —

d) Silbergeld.

Franceſconi und Leopoldini zu 6⅔ Lire.
Dergleichen halbe, genannt Franceſcini, zu 3⅓ Lire.
Tallari zu 6 Lire.
Teſtoni zu 2 Lire.
Ganze, ½ und ¼ Lire.

Namen und Verhältniß der kleinern Münzen giebt folgende Tabelle.

Lira	Paoli	Crazie	Soldi	Quatrini	Denari
1,	1½,	12,	20	60	240

e) Innerer Gehalt.

1 Lira = 78,45 As f. G. = 5,43 As f. G.
1 Ducato = 549,15 ; ; ; = 38,02 ; ; ;
1 Scudo d'oro = 588,37 ; ; ; = 40,73 ; ; ;
1 Pezza = 451,09 ; ; ; = 31,23 ; ; ;

f) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 L. = 22 T. 13 G. 11⅕ P.; 1 L. = 5 G. 5 P.
100 D. = 155 ; 3 ; 6⅗ ; 1 D. = 1 T. 13 ; 11⅕ ;
100 S. = 166 ; 5 ; 6 ; 1 S. = 1 ; 16 ; 7 ;
100 P. = 127 ; 16 ; 7⅗ ; 1 P. = 1 ; 5 ; 2 ;

Alle Werthe unter e) und f) gelten für die Valute Moneta buona. Für Moneta lunga würde von jedem Werthe der 24ſte Theil abgezogen werden müſſen.

I) Der Kirchenſtaat. (Rom, Ancona, Bologna.)

a) Rechnungsgeld.

In Rom. Scudo, zu 10 Paoli oder Giuli, zu 10 Bajocchi.
In Ancona. Scudo, zu 20 Soldi, zu 12 Denari.
Zu Bologna. Lira, zu 20 Soldi, zu 12 Denari di Bologna.

b) Valuta. 1) Römiſch Courant. 2) Anconiſch Courant. 3) Bologneſiſch Courant. 4) Bologneſiſch Wechſelgeld, welches beſtändig um 2½ p. C. beſſer iſt als Courant.

In Ancona. Scudo, zu 20 Soldi, zu 12 Denari.
Zu Bologna. Lira, zu 20 Soldi, zu 12 Denari di Bologna.

c) Gold. Seit 1786.

	Römisch Cour.	Anconitsch Cour.	Bolognesisch Cour.
Zecchino	215 Bajocchi	43 Soldi	$10\frac{3}{4}$ Lire
Doppia	315 —	63 —	$15\frac{3}{4}$ —

d) Silbergeld.

	Scudo romano	Teſtone	Carlini od. Giuli.	Paoli	Bajocchi	Quatrini	Quatrini mezzi.
1) Rom.	1	$3\frac{1}{2}$	$6\frac{2}{3}$	10	100	500	1000

	Scudo romano	Paoli od. Giuli.	Groſſi Soldi	Bolognini	Baiocchi	Dinari
2) Ancono.	1	10	20	80	100	240

	Scudo romano	Lire di Bol. od. Papette	Paoli	Baiocchi od. Soldi di Bol.	Quatrini di Bol.	Dinari di Bol.
3) Bologna.	1	5	10	100	600	1200

Ferner iſt zu merken:

	Rom.	Ancona	Bologna Cour.	Bco.
Pezza vecchia (Alter Piaſt.)	$10\frac{1}{2}$ Paoli	21 Soldi	$5\frac{1}{4}$ Lire	5 L. 8 S*

e) Innerer Gehalt:

1 Scudo Rom. = 510,71 As f. S. = 32,70 As f. G.

1 Scudo Anc. eben ſo.

1 Lira Bologn. C. = 102,14 As f. S. = 6,54 As f. G.

f) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 Scudi Rom. od. Anc.	=	146 Thl.	23 Gr.	11 Pf.
1 ; ; ; ;	=	1 ;	11 ;	$3\frac{1}{3}$;
100 Lire Bologn. Corr.	=	29 ;	9 ;	7 ;
1 Lira ; ;	=	— ;	7 ;	$\frac{2}{3}$;

3) Unter-Italien.

K) Das Königreich Neapolis.

a) Rechnungsg. Ducato di Regno, zu 10 Carlini, zu 10 Grani.

b) Valuta Neapolitaniſch.

c) Gold.

6, 4 und 2 fache Ducati zu 60, 40 und 20 Neapol. Carlini.

d) Silbergeld.

Ducato di Regno	Tari	Carlini	Cinquini	Grani
1	5	10	40	100

Tornesi	Quartini	Piccioli	Cavalli.
200	360	600	1200

e) Innerer Gehalt.

1 Duc. di Regno = 394,55 As f. S. = 26,60 As f. G.

f) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 Duc. di Regno = 113 Thl. 13 Gr. 6 Pf.

1 ′ ′ ′ = 1 ′ 3 ′ 3 ′

L) Sicilien. (Palermo.)

a) Rechnungsgeld.

Once, zu 30 Tari, zu 20 Grani.

b) Valuta. Sicilianisch.

Die Sicil. Tari und Neapol. Carlini haben gleichen Werth.

Daher 1 Once = 3 Duc. di Regno.

c) Gold.

Once zu 30 Tari.

d) Silbergeld.

Once	Scudi	Fiorini	Tari	Carlini
1	2½	5	30	60

Ponti	Grani	Piccioli.
450	600	3600

e) Innerer Gehalt.

1 Once = 1183,65 As f. S. = 79,80 As f. G.

f) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 O. = 340 T. 16 G. 6 P.; 1 O. = 3 T. 9 Gr. 9 P.

XIV) Die Türkey.

Es ist nicht möglich, über die türkischen Münzen feste Bestimmungen anzugeben, weil sie theils gar nicht nach einem festen und unveränderlichen Münzfuß ausgeprägt werden, theils weil selbst der Zahlwerth der wirklichen Münzen vielen willkührlichen oder doch nicht dem innern Gehalte angemessenen Veränderungen unterworfen zu seyn scheint. Folgende, aus Hrn. Gerhardts Taschenbuch entlehnte, Bestimmungen, mögen einigermaaßen zu einer allgemeinen Uebersicht dienen.

a) Das Verhältniß und die Namen des Rechnungsgeldes sind folgende:

1 Piast. = 40 Paras = 100 gute Asper = 120 Courant Asper.

Bey großen Summen heißen 500 Piaster ein Beutel (Kesser); und 30000 Piaster ein Beutel Gold (Kitze).

b) Gold.

Ganze, halbe, und $\frac{1}{4}$ Zechinen, oder Fonduc, zu 5, $2\frac{1}{2}$, $1\frac{1}{4}$ Piaster.

Ganze und halbe Zechinen, Althentambul, oder Zerimabud zu $3\frac{1}{2}$, $1\frac{3}{4}$ Piaster.

c) Silber.

Stücke zu 100, 80, 60, 40, 30, 20, 10, 5 und 1 Para.

Asper, 3 Stück auf den Para gerechnet.

d) Gehalt. Auf eine Clln. Mark f. S. sollen $26\frac{1}{4}$ Piaster gehen. Daraus würde folgen: 1 Piaster = 185,3 As f. S.

e) Vergleichung mit Brand. Geld.

Aus d folgt:

1 Piaster = 12 Gr. $9\frac{3}{5}$ Pf.; 100 Piast. = 53 Thl. 8 G.

XV) Die Nordamerikanischen Staaten.

a) Rechnungs-Geld. Man rechnet noch jetzt gewöhnlich, wie in England,

nach Pfund, zu 20 Schilling, zu 12 Pence Cour.

obgleich der Zahlwerth dieser Rechnungsmünzen nicht nur von den englischen gleiches Namens, sondern auch in verschiedenen Gegenden der nordamerikanischen Freystaaten selbst verschieden ist. Man sehe b.

Man rechnet aber auch nach

Dollars, zu 10 Dimes, zu 10 Cents.

b) Valuta. Der Werth des Rechnungspfundes ist in den nordamerikanischen Staaten selbst vierfach.

1) In Südcarolina und Georgien sind

28 Pf. = 27 Pf. Sterling.

2) In Neuhampshire, Massachusets, Rhode Island, Connecticut und Virginien sind

4 Pf. = 3 Pf. Sterling.

3) In Pensylvanien, Neujersey, Delaware, Mariland, sind 5 Pf. = 3 Pf. Sterling.

4) In Neuyork und Nordcarolina sind 16 Pf. = 9 Pf. Sterling.

Was ferner den Dollar betrift, der ursprünglich der spanische Piaster ist, so gilt derselbe $4\frac{1}{2}$ Schilling Sterling, $4\frac{2}{3}$ in der Valuta Nr. 1; 6 Schill. in der Valuta Nr. 2; $7\frac{1}{2}$ Schill. in der Valuta Nr. 3; und 8 Schill. in der Valuta Nr. 4.

c) Wirkliche Münzen.

Gold.

Adler oder Engel, ganze und halbe, zu 10 und 5 Doll.

Silber.

Dollar oder Unités, ganz und halbe, zu 10 und 5 Dimes.

Dimes, doppelte und einfache, zu 20 und 10 Cents.

Kupfer.

Cents zu 10 Milles.

Milles.

d) Innerer Gehalt.

1 Pf. Valuta Nr. 1 = 2204,9 As f. S.
1 Pf. — — 2 = 1714,9 : : :
1 Pf. — — 3 = 1371,9 : : :
1 Pf. — — 4 = 1286,2 : : :
1 Dollar = 514,45 : : :

e) Vergleichung mit Brand. Geld.

100 Pf. Val. 1 = 634 Thl. 15 Gr. $1\frac{4}{5}$ Pf.;
1 Pf. — = 6 — 8 — $3\frac{1}{5}$ —
100 Pf. — 2 = 493 — 14 — $5\frac{2}{5}$ —
1 Pf. — = 4 — 22 — $5\frac{1}{5}$ —
100 Pf. — 3 = 394 — 21 — 2 —;
1 Pf. — = 2 — 22 — $9\frac{1}{4}$ —
100 Pf. — 4 = 370 — 4 — 10 —;
1 Pf. — = 3 — 16 — $10\frac{4}{5}$ —
100 Dollars = 148 — 1 — $11\frac{4}{5}$ —;
1 Doll. = 1 — 11 — $6\frac{1}{5}$ —

Anmerkungen

über

die Einrichtung und den Gebrauch

dieser Münztabellen.

Bey Vergleichung eines ältern Entwurfs mit den Nachrichten, welche Herr Gerhardt, theils in seinem Contoristen, theils in der neuen Ausgabe des Nelkenbrecherschen Taschenbuchs, mit so vieler Sorgfalt und Genauigkeit gesammelt hat, fand ich, daß die Bestimmungen, die ich ehedem aus Kruse, Riccard und den ältern Ausgaben von Nelkenbrecher gesammelt hatte, besonders bei den ausländischen Münzen, jetzt nicht mehr giltig, oder doch nicht genau genug waren. Dies nöthigte mich, zwei Drittel dieser Tabellen so gut als gänzlich umzuarbeiten. Die Verbesserungen hat also der Leser nicht sowohl mir als Herrn Gerhardt zu verdanken, dessen Angaben ich bloß, meinem Plane gemäß, geordnet und berechnet habe.

Ungeachtet ich gewünscht hätte, daß mir meine übrigen Geschäfte verstattet haben möchten, diese Tabellen ganz und gar umzuarbeiten, und in eine noch bequemere Form zu bringen, so glaube ich doch behaupten zu können, daß es schwerlich möglich seyn dürfte, mehr auf so wenigen Blättern zusammen zu drängen, als auch schon bey der gegenwärtigen Einrichtung geschehen ist.

Ich habe die Münzen nach Ländern, nicht nach Städten, geordnet, weil diese Tabellen bey ihrer ersten Ausarbeitung nicht für dieses Buch, sondern zu einem kurzen Unterricht über das Münzwesen für junge Leute, und zur Uebung in den dabey vorkommenden Reductions-Rechnungen bestimmt waren. Zum ersten Zweck schien mir die Anordnung nach Ländern bequemer.

Bey jedem Lande habe ich die Vorstellung des Münzwesens unter fünf Nummern gebracht. (von welcher Einrichtung nur ein paar Länder Ausnahmen machen).

a) Rechnungsgeld, d. h. diejenigen Münzsorten, in welchen Buch und Rechnung geführt wird; wie bey uns Thl. Gr. Pf., oder in England Pfund, Schilling, Penny Sterling u. d. gl. Daß diese Münzen oft nur erdichtete Münzen sind, (wie in England Pfund) ist bekannt. Uebrigens wird unter dieser Nummer gewöhnlich nur das Verhältniß der Rechnungs-Münzen unter einander angegeben. Ihr Verhältniß gegen andere in- und ausländische Münzen aber ergiebt sich aus den folgenden Nummern.

b) In vielen Ländern haben eben dieselben Namen der Rechnungsmünzen zweierlei oder mehrerlei Werthe, welches durch ein beygesetztes Wort angedeutet wird. Thaler Gold sind im Brandenburgischen etwas anders als Thaler Courant, und Pfund Sterling in England etwas anders als Pfund Irisch in Irland, u. dergl. m. Jeden solchen eigenen Werth und Namen der Rechnungsmünzen nennen die Kaufleute eine Valuta (Werth, Zahlwerth); und diese Valuten sind unter b) bemerkt. Da wo ihr Verhältniß gegen einander nicht unmittelbar angemerkt ist, ergiebt es sich aus den folgenden Nummern, besonders e) und f).

c) Unter c) findet man die Haupt-Goldmünzen jedes Landes, mit ihrem Verhältnisse gegen die Rechnungsmünzen desselben Landes.

d) Bey d) sind die übrigen gebräuchlichen Münzen jedes Landes so angegeben, daß die größte Münze voransteht, und dann bey jeder kleinern eine Zahl steht, welche anzeigt, wie viel Stücke von jeder kleinern Sorte auf die zuerststehende größte Münze gehen. Auf diese Art hat man das Verhältniß aller dieser Münzen unter einander, und da in dieser Reihe immer auch die Rechnungsmünzen stehen, so ist auch das Verhältniß jeder Münze gegen diese angegeben.

e) Diese Nummer enthält die Bestimmung des innern Gehalts der Hauptrechnungsmünzen. Jedermann weiß,

daß Gold und Silber, aus mehrern Ursachen, nie rein, sondern immer mit Zusatz eines andern Metalls, besonders Kupfers, verarbeitet wird. Wer daher eine Gold- oder Silbermünze wiegt, darf nicht glauben, daß er wirklich so viel Gold oder Silber habe, als sie schwer ist. Ein Dukaten z. B., der 72 holl. As schwer ist, enthält ungefähr nur 69 As fein Gold (d. i. wirkliches Gold), das übrige ist Zusatz. Der wahre innere Werth einer Münze hängt daher nicht sowohl von ihrem Gewichte, sondern von ihrem Gehalte an reinem Metalle, ab. Ich habe daher bey jedem Lande angegeben, wie viel die Hauptrechnungsmünze an feinem Golde und Silber enthalten müsse. Wo die Rechnungsmünzen nicht wirkliche, sondern erdichtete Münzen sind, da begreift man leicht daß durch den Gehalt und das Verhältniß der übrigen wirklichen Münzen völlig bestimmt sey, wie viel feines Metall die Rechnungsmünze enthalten müßte, wenn sie in Gold oder Silber wirklich ausgeprägt werden sollte; und so ist alsdenn die Angabe des innern Gehalts zu verstehen. — Uebrigens macht diese Angabe des innern Gehalts gewissermaßen den wichtigsten Theil jeder Tabelle aus; theils weil dadurch der eigentliche innere Werth jeder unter c) und d) angegebenen Münze bestimmt ist, theils weil dadurch die Münzen aller angeführten Länder auf ein einziges festes Maaß, nemlich Gold- und Silbergewicht, gebracht sind. Die As, in welchen der innere Gehalt angegeben ist, sind holländische, deren auf die Mark holl. Troyes Gewicht 51,20, auf die Mark Cöllnisch aber, die in Deutschland überall bey Gold und Silber gebraucht wird, 4864 gehen. Man sieht also leicht ein, daß vermittelst dieses innern Gehalts die sämmtlichen in diesen Tabellen enthaltenen Münzen unter einander verglichen werden können. Denn jede Münze kann nach c) oder d) mit den Rechnungsmünzen, diese nach e) mit Gold- und Silbergewicht, und dies wieder auf ähnliche Art mit jeder Münze jedes andern Landes verglichen werden, so daß jede Vergleichung dieser Art vermittelst eines längern oder kürzern Kettenaufsatzes verrichtet werden kann. — Da der innere Gehalt allezeit (die Schweiz und Türkey ausgenommen), sowohl in Gold- als Silbergewicht angegeben ist, so erhält man dadurch für jedes Land das gesetzmäßige Verhält-

niß zwischen Gold und Silber. — Für Leser, die nicht mit Decimalbrüchen bekannt sind, muß ich noch anmerken, daß in den Zahlen, durch welche der innere Gehalt bestimmt wird, nur die Zahlen vor dem Komma Ganze sind, steht eine Ziffer hinter dem Komma, so zeigt sie Zehntel an, zweie sind Hunderttel, dreie Tausendtel u. s. f. — Noch bemerke ich, daß bey Vergleichungen und Reductionen der Münzen verschiedener Länder auf einander eigentlich nur Goldmünzen mit Goldmünzen, desgleichen Silbermünzen mit Silbermünzen verglichen werden müßten, und daß im ersten Falle die Vergleichung nur durch As fein Gold, im letzten durch As fein Si ber gemacht werden müßte. Denn wenn man Gold eines Landes mit Silber eines andern vergleicht, so können, wenn das Verhältniß von Gold und Silber in beiden Ländern verschieden ist, zweierlei Resultate herausgebracht werden, je nachdem man die Vergleichung zwischen Gold und Silber entweder aus der Tabelle des einen oder des andern Landes nimmt.

Daß der Geldcours, d. i. die wirkliche Geltung desselben sich gar nicht immer nach dem innern Gehalte richte, ist eine bekannte Sache. Wer jenen wissen will, kann ihn nie mit Sicherheit aus Büchern lernen, weil er oft den größten Veränderungen unterworfen ist, sondern muß die Courszettel befragen, die in wichtigen Handelsplätzen wöchentlich oder noch öfter gedruckt werden.

f) Endlich habe ich noch unter der letzten Nummer die Hauptrechnungsmünzen jedes Landes unmittelbar mit brandenburgischem Gelde verglichen. Zweck und Einrichtung fällt von selbst in die Augen, und ich bemerke nur, daß man diese Nummern statt des innern Gehalts zur Vergleichung der Münzen verschiedener Länder brauchen kann. Doch giebt der innere Gehalt ein genaueres Resultat.

Folge der Länder
in
diesen Münztabellen.

I. Deutschland.

1. Länder in welchen nach Thalern gerechnet wird.

A) Die Brandenburgischen Länder. Hiezu kommen um des politischen Zusammenhangs willen

B) Schlesien.

C) Preußen. Nun folgt

D) Schwedisch-Pommern.

E) Sachsen.

F) Mecklenburg.

G) Die Braunschweigischen Länder.

H) Bremen, Verden, Oldenburg, Delmenhorst.

I) Cleve, Jüllch, Berg, Mark.

K) Ostfrießland.

L) Osnabrück.

M) Münster.

N) Lüttich nebst Mastricht.

O) Aachen.

P) Erzstift Cölln.

Q) — Trier.

R) — Maynz. Frankfurth a. M. Hessen-Darmstadt.

S) Hessen-Cassel.

2. Länder in welchen man nach Gulden rechnet.

T) Der österreichische Kreis. Böhmen. Mähren.

U) Der bayersche Kreis.

V) Der fränkische Kreis.

W) Der schwäbische Kreis; insonderheit das Herzogthum Würtenberg.

X) Augsburg und Ulm.

3. Oerter, in welchen nach Marken gerechnet wird.

Y) Hamburg. Lübeck. Altona.

II. Die vereinigten Niederlande.

III. Die österreichischen Niederlande.

IV. Die Schweitz, und zwar

A) Zürich.
B) Basel, Bern, Freiburg, Solothurn, Biel, Walliserland.
C) Lucern, Schweitz, Unterwalden, Uri, Glaris, Zug, Schafhausen, Appenzell, Rheinthal, Sorgans, Turgau, Doggenburg, St. Gallen.
D) Graubünder = Land.
E) Genf.
F) Neufchatel.

V. Dänemark und Norwegen.
VI. Schweden.
VII. Polen.
VIII. Rußland.
IX. Groß = Britannien.
A) England und Schottland.
B) Irland.
X. Frankreich.
XI. Spanien.
A. Die eigentlich spanischen Münzen.
B) Die spanisch Westindischen od. Mexicanischen M.
XII. Portugall.
XIII. Italien.
1. Ober Italien.
A) Savoyen, Piemont, Montferat, und die Insel Sardinien.
B) Genua.
C) Mailand.
D) Venedig.
E) Parma und Pacenza.
F) Modena.
G) Lucca.
2. Mittel = Italien.
H) Toskana.
I) Kirchenstaat.
3. Unter = Italien.
K) Neapel.
L) Sicilien.
XIV. Die Türkey.
XV. Die nordamerikanischen Freistaaten.

Register
der
vornehmsten Europäischen Handelsplätze.

Aachen	I. O.	354
Alicante	XI. A.	375 f.
Altona	I. Y.	361
Amsterdam	II.	363
Ancona	XIII. I.	386
Antwerpen	III.	364
Archangel	VIII.	372
Augsburg	I. X.	360
Barcellona	XI. A.	375 f.
Basel	IV. B.	366
Bassano	XIII. D.	382
Bayonne	X.	374
Bergamo	XIII. D.	382 f.
Bergen	V.	370
Berlin	I. A.	347
Bern	IV. B.	366
Bilbao	XI. A.	376 f.
Bologna	XIII. I.	386
Bourdeaux	X.	374
Braunschweig	I. G.	350. 351
Bremen	I. H.	352
Breslau	I. B.	348
Brüssel	III.	305. 364
Cadix	XI. B.	378 f.
Carrara	XIII. B.	380
Cassel	I. G.	357
Cleve	I. I.	352
Coblenz	I. Q.	355. 356
Cölln	I. P.	355
Constantinopel	XIV.	388
Insel Corsica	XIII. B.	380
Cremona	XIII. C.	382
Danzig	I. C.	348
Dublin	IX. B.	374
Dünkirchen	X.	374
auch	III.	364
Emden	I. K.	352
Erfurth wie Sachsen	I. E.	350
Ferrara	XIII. I.	386
Florenz	XIII. H.	385
Frankfurth a. M.	I. R.	356
— a. d. O.	I. A.	347
Gallipoli	XIII. K.	387 f.
Genf od. Geneve	IV. E.	368
Genua	XIII. B	381
Gothenburg	VI.	371 f.
Hamburg	I. Y.	361. 362
Hannover	I. G.	350. 351
Heidelberg	I. U.	358
Hildesheim	I. G.	351
Königsberg	I. C.	348
Kopenhagen	V.	370
Leipzig	I. E.	350
Liebau in Curland wie Preußen	I. C.	348
Linz	I. T.	357. 358
Lion oder Lyon	X.	374
Lissabon	XII.	379
Livorno	XIII. H.	385
London	IX. A.	373
L'Orient	X.	374
Lucca	XIII. G.	385
Lübeck	I. Y.	361. 362
Lüneburg	I. G.	350. 351
Lüttich	I. N.	354
Madrit	XI.	375 f.
Magdeburg	I. A.	347
Mailand der Milano	XIII. C.	382
Insel Maiorca	XI.	375
Malaga	XI.	375
Mantua	XIII. C.	382
Marseille	X.	374
Maynz	I. R.	356
Memel wie Preußen	I. C.	348
Messina	XIII. I.	388

Mexico	XI. B.	378
Minden wie Braunschweig	I. G. 350.	351
Modena	XIII. F.	384
Montpellier	X.	374
Moscau	VIII.	372
München	I. U.	358
Münster	I. M.	353
Nantes	X.	374
Neapolis	XIII. K.	387
Narva	VIII.	373
Naumburg	I. E.	350
Navarra	XI.	375
Nizza	XIII. A.	380
Nove od. Novi	XIII. B.	381
Nürnberg	I. V. 359.	360
Osnabrück	I. L.	353
Padua	XIII. D.	382
Palermo	XIII. L.	388
Paris	X.	374
Parma	XIII. E.	384
Patrosso auf Morea	XIV.	389 f.
Pernau in Liefland	VIII.	372
Porto	XII.	379 f.
Prag	I. T. 357.	358
Regensburg	I. U.	358
Reval	VIII.	372
Rochelle	X.	374
Rom	XIII. I.	386
Rostock	I. F.	350
Rotterdam	II.	363
Rouen	X.	374
Ryssel	X.	374
Stettin	I. A.	347
St. Gallen	IV. C.	365
St. Hubes	XII.	379
St. Malo	X.	374
St. Petersburg	VIII.	372
St. Remo	XIII. B.	381
Stralsund	I. D.	349
Sardinien	XIII. A.	380
Sevilla	XI.	375
Smirna	XIV.	389
Stockholm	VI.	371
Strasburg	X.	374
Toulon	X.	374
Trier	I. Q. 355.	356
Trieste	I. T. 357.	358
Turin	XIII. A.	389
Ulm	I. X.	360
Valencia	XI.	375 f.
Venedig	XIII. D.	382
Verona	XIII. D.	383
Wien	I. T. 357.	358
Wismar	I. F.	350
Würtemberg	I. W.	360
Zelle im Lüneburgisch.	I. G. 350.	351
Zürch	IV. A.	365

Aus einer gegebenen Zahl, mit Hülfe der Quadrattafeln, die Quadratwurzel zu finden.

Nachdem die gegebene Zahl in ihre Klassen eingetheilt ist, so suche man in den Quadrattafeln eine Quadratzahl, welche eben so groß, oder allen, oder den ersten Klassen der gegebenen Zahl am nächsten kommt, und subtrahire solche davon. Die dazu gehörige und in den Quadrattafeln befindliche Wurzel setze man an die Stelle der Wurzel, und sehe sie als den ersten Theil an. Mit den noch übrigen Klassen verfahre man wie gewöhnlich. Z. B.

38|94|86|2 5|7 8] 62408...

Aus den Tafeln 38|93|76

1 10|2 5

2.624 = (1 24|8)0

1 10 2 5|7 8

2.6240 (12 4 8|0)8

99 8 4 6 4

10 4 1 1 4

Für die ersten drey Klassen findet man in den Tafeln die nächst kleinere Quadratzahl 389376, und die dazu gehörige Wurzel 624. Das fernere Verfahren zeigt die obenstehende Rechnung, und es gehet daraus hervor, daß die Quadratwurzel von 3894862578 zwischen die Zahlen 62408 und 62409 fällt.

Aus einer gegebenen Zahl, mit Hülfe der Kubiktafeln, die Kubicwurzel zu finden.

Das Verfahren ist hier ganz dasselbe, wie bey den Quadrattafeln. Z. B.

242	970	721	674]	6240....
242	970	624		
		97	674	
$3.624^2 =$		(16708	8)	

Für die ersten drey Klassen findet man in den Tafeln die nächst kleinere Kubiczahl 242970624 und die dazu gehörige Wurzel 624. — Die beystehende Rechnung zeigt, daß die Kubicwurzel der Zahl 242970721674 zwischen die Zahlen 6240 und 6241 fällt.

Tafel

der

Quadrat- und Kubikzahlen

von 1 bis 1000.

N²	0²	100²	200²	300²	400²
0	0	10000	40000	90000	160000
1	1	10201	40401	90601	160801
2	4	10404	40804	91204	161604
3	9	10609	41209	91809	162409
4	16	10816	41616	92416	163216
5	25	11025	42025	93025	164025
6	36	11236	42436	93636	164836
7	49	11449	42849	94249	165649
8	64	11664	43264	94864	166464
9	81	11881	43681	95481	167281
10	100	12100	44100	96100	168100
11	121	12321	44521	96721	168921
12	144	12544	44944	97344	169744
13	169	12769	45369	97969	170569
14	196	12996	45796	98596	171396
15	225	13225	46225	99225	172225
16	256	13456	46656	99856	173056
17	289	13689	47089	100489	173889
18	324	13924	47524	101124	174724
19	361	14161	47961	101761	175561
20	400	14400	48400	102400	176400
21	441	14641	48841	103041	177241
22	484	14884	49284	103684	178084
23	529	15129	49729	104329	178929
24	576	15376	50176	104976	179776
25	625	15625	50625	105625	180625
26	676	15876	51076	106276	181476
27	729	16129	51529	106929	182329
28	784	16384	51984	107584	183184
29	841	16641	52441	108241	184041
30	900	16900	52900	108900	184900
31	961	17161	53361	109561	185761
32	1024	17424	53824	110224	186624
33	1089	17689	54289	110889	187489
34	1156	17956	54756	111556	188356
35	1225	18225	55225	112225	189225
36	1296	18496	55696	112896	190096
37	1369	18769	56169	113569	190969
38	1444	19044	56644	114244	191844
39	1521	19321	57121	114921	192721
40	1600	19600	57600	115600	193600
41	1681	19881	58081	116281	194481
42	1764	20164	58564	116964	195364
43	1849	20449	59049	117649	196249
44	1936	20736	59536	118336	197136
45	2025	21025	60025	119025	198025
46	2116	21316	60516	119716	198916
47	2209	21609	61009	120409	199809
48	2304	21904	61504	121104	200704
49	2401	22201	62001	121801	201601

N^2	0^2	100^2	200^2	300^2	400^2
50	2500	22500	62500	122500	202500
51	2601	22801	63001	123201	203401
52	2704	23104	63504	123904	204304
53	2809	23109	64009	124609	205209
54	2916	23716	64516	125316	206116
55	3025	24025	65025	126025	207025
56	3136	24336	65536	126736	207936
57	3249	24649	66049	127449	208849
58	3364	24964	66564	128164	209764
59	3481	25281	67081	128881	210681
60	3600	25600	67600	129600	211600
61	3721	25921	78121	130321	212521
62	3844	26244	68644	131044	213444
63	3969	26569	69169	131769	214369
64	4096	26896	69696	132496	215296
65	4225	27225	70225	133225	216225
66	4356	27556	70756	133956	217156
67	4489	27889	71289	134689	218089
68	4624	28224	71824	135424	219024
69	4761	28561	72361	136161	219961
70	4900	28900	72900	136900	220900
71	5041	29241	73441	137641	221841
72	5184	29584	73984	138384	222784
73	5329	29929	74529	139129	223729
74	5476	30276	75076	139876	224676
75	5625	30625	75625	140625	225625
76	5776	30976	76176	141376	226576
77	5929	31329	76729	142129	227529
78	6084	31684	77284	142884	228484
79	6241	32041	77841	143641	229441
80	6400	32400	78400	144400	230400
81	6561	32761	78961	145161	231361
82	6724	33124	79524	145924	232324
83	6889	33489	80089	146689	233289
84	7056	33856	80656	147456	234256
85	7225	34225	81225	148225	235225
86	7396	34596	81796	148996	236196
87	7569	34969	82369	149769	237169
88	7744	35344	82944	150544	238144
89	7921	35721	82521	151321	239121
90	8100	36100	84100	152100	240100
91	8281	36481	84681	152881	241081
92	8464	36864	85264	153664	242064
93	8649	37249	85849	154449	243049
94	8836	37636	86436	155236	244036
95	9025	38025	87025	156025	245025
96	9216	38416	87616	156816	246016
97	9409	38809	88209	157609	247009
98	9604	39204	88804	158404	248004
99	9801	39601	89401	159201	249001

N²	500²	600²	700²	800²	900²
0	250000	360000	490000	640000	810000
1	251001	361201	491401	641601	811801
2	252004	362404	492804	643204	813604
3	253009	363609	494209	644809	815409
4	254016	364816	495616	646416	817216
5	255025	366025	497025	648025	819025
6	256036	367236	498436	649636	820836
7	257049	368449	499849	651249	822649
8	258064	369664	501264	652864	824464
9	259081	370881	502681	654481	826281
10	260100	372100	504100	656100	828100
11	261121	373321	505521	657721	829921
12	262144	374544	506944	659344	831744
13	263169	375769	508369	660969	833569
14	264196	376996	509796	662596	835396
15	265225	378225	511225	664225	837225
16	266256	379456	512656	665856	839056
17	267289	380689	514089	667489	840889
18	268324	381924	515524	669124	842724
19	269361	383161	516961	670761	844561
20	270400	384400	518400	672400	846400
21	271441	385641	519841	674041	848241
22	272484	386884	521284	675684	850084
23	273529	388129	522729	677329	851929
24	274576	389376	524176	678976	853776
25	275625	390625	525625	680625	855625
26	276676	391876	527076	682276	857476
27	277729	393129	528529	683929	859329
28	278784	394384	529984	685584	861184
29	279841	395641	531441	687241	863041
30	280900	396900	532900	688900	864900
31	281961	398161	534361	690561	866761
32	283024	399424	535824	692224	868624
33	284089	400689	537289	693889	870489
34	285156	401956	538756	695556	872356
35	286225	403225	540225	697225	874225
36	287296	404496	541696	698896	876096
37	288369	405769	543169	700569	877969
38	289444	407044	544644	702244	879844
39	290521	408321	546121	703921	881721
40	291600	409600	547600	705600	883600
41	292681	410881	549081	707281	885481
42	293764	412164	550564	708964	887364
43	294849	413449	552049	710649	889249
44	295936	414736	553536	712336	891136
45	297025	416025	555025	714025	893025
46	298116	417316	556516	715716	894916
47	299209	418609	558009	717409	896809
48	300304	419904	559504	719104	898704
49	301401	421201	561001	820801	900601

N²	500²	600²	700²	800²	900²
50	302500	422500	562500	722500	902500
51	303601	423801	564001	724201	904401
52	304704	425104	565504	725904	906304
53	305809	426409	567009	727609	908209
54	306916	427716	568516	729316	910116
55	308025	429025	570025	731025	912025
56	309136	430336	571536	732736	913936
57	310249	431649	573049	734449	915849
58	311364	432964	574564	736164	917764
59	312481	434681	576081	737881	919681
60	313600	435600	577600	739600	921600
61	314721	436921	579121	741321	923521
62	315844	438244	580644	743044	925444
63	316969	439569	582169	744769	927369
64	318096	440896	583696	746496	929296
65	319225	442225	585225	748225	931225
66	320356	443556	586756	749956	933156
67	324489	444889	588289	751689	935089
68	322624	446224	589824	753424	937024
69	323761	447561	591361	755161	938961
70	324900	448900	592900	756900	940900
71	326041	450241	594441	758641	942841
72	327183	451584	595984	760384	944784
73	328329	452929	597529	762129	946729
74	329476	454276	599076	763876	948676
75	330625	455625	600625	765625	950625
76	331776	456976	602176	767376	952576
77	332929	458329	603729	769129	954529
78	334084	459684	605284	770884	956484
79	335241	461041	606841	772641	958441
80	336400	462400	608400	774400	960400
81	337561	463761	609961	776161	962361
82	338724	465124	611524	777924	964324
83	339889	466489	613089	779689	966289
84	341056	467856	614656	781456	968256
85	342225	469225	616225	783225	970225
86	343396	470596	617796	784996	972196
87	344569	471969	619369	786769	974169
88	345744	473344	620944	788544	976144
89	346921	474721	622521	790321	978121
90	348100	476100	624100	792100	980100
91	349281	477481	625681	793881	982081
92	350464	478864	627264	795664	984064
93	351649	480249	628849	797449	986049
94	352836	481636	630436	799236	988036
95	354025	483025	632025	801025	990025
96	355216	484416	633616	802816	992016
97	356409	485809	635209	804609	994009
98	357604	487204	636804	806404	996004
99	358801	488601	638401	808201	998001

N³	0³	100³	200³	300³	400³
0	0	1000000	8000000	27000000	64000000
1	1	1030301	8120601	27270901	64481201
2	8	1061208	8242408	27543608	64964308
3	27	1092727	8365427	27818127	65450827
4	64	1124864	8489664	28094464	65939264
5	125	1157625	8615125	28372625	66430125
6	216	1191016	8741816	28652616	66923416
7	343	1225043	8869743	28934443	67419143
8	512	1259712	8998912	29218112	67917312
9	729	1295029	9129329	29503629	68417929
10	1000	1331000	9261000	29691000	68921000
11	1331	1367631	9393931	30080231	69426531
12	1728	1404928	9528128	30371328	69934528
13	2197	1442897	9663597	30664297	70444997
14	2744	1481544	9800344	30959144	70957944
15	3375	1520875	9938375	31255875	71473375
16	4096	1560896	10077696	31554496	71991296
17	4913	1601613	10218313	31855013	72511713
18	5832	1643032	10360232	32157432	73034632
19	6859	1685159	10503459	32461759	73560059
20	8000	1728000	10648000	32768000	74088000
21	9261	1771561	10793861	33076161	74618461
22	10648	1815848	10941048	33386248	75151448
23	12167	1860867	11089567	33698267	75686967
24	13827	1906624	11239424	34012224	76225024
25	15625	1953125	11390625	34328125	76765625
26	17576	2000376	11543176	34645976	77308776
27	19683	2048383	11693083	34965783	77854483
28	21952	2097152	11852352	35287552	78402752
29	24389	2146689	12008989	35611289	78953589
30	27000	2197000	12167000	35937000	79507000
31	29791	2248091	12326391	36264691	80062991
32	32768	2299968	12487168	36594368	80621568
33	35937	2352637	12649337	36926037	81182737
34	39304	2406104	12812904	37259704	81746504
35	42875	2460375	12977875	37595375	82312875
36	46656	2515456	13144256	37933056	82881856
37	50653	2571353	13312053	38272753	83453453
38	54872	2628072	13481272	38614472	84027672
39	59319	2685619	13651919	38958219	84604519
40	64000	2744000	13824000	39304000	85184000
41	68921	2803221	13997521	39651821	85766121
42	74088	2863288	14172488	40001688	86350888
43	79507	2924207	14348907	40353607	86938307
44	85184	2985984	14526784	40707584	87528384
45	91125	3048625	14706125	41063625	88121125
46	97336	3112136	14886936	41421736	88716536
47	103823	3176523	15069223	41781923	89314623
48	110592	3241792	15252992	42144192	89915392
49	117649	3307949	15438249	42508549	90518849

N°	0°	100°	200°	300°	400°
50	125000	3375000	15625000	42875000	91125000
51	132651	3442951	15813251	43243551	91733851
52	140608	3511808	16003008	43614208	92345408
53	148877	3581577	16194277	43986977	92959677
54	157464	3652264	16387064	44361864	93576664
55	166375	3723875	16581375	44738875	94196375
56	175616	3796416	16777216	45118016	94818816
57	185193	3869893	16974593	45499293	95443993
58	195112	3944312	17173512	45882712	96071912
59	205379	4019679	17373979	46268279	96702579
60	216000	4096000	17576000	46656000	97336000
61	226981	4173281	17779581	47045881	97972181
62	238328	4251528	17984728	47437928	98611128
63	250047	4330747	18191447	47832147	99252847
64	262144	4410944	18399744	48228544	99897344
65	274625	4492125	18609625	48627125	100544625
66	287496	4574296	18821096	49027896	101194696
67	300763	4657463	19034163	49430863	101847563
68	314432	4741632	19248832	49836032	102502232
69	328509	4826809	19465109	50243409	103161709
70	343000	4913000	19683000	50653000	103823000
71	357911	5000211	19902511	51064811	104487111
72	373248	5088448	20123648	51478848	105154048
73	389017	5177717	20346417	51895117	105823817
74	405224	5268024	20570824	52313624	106496424
75	421875	5359375	20796875	52734375	107171875
76	438976	5451776	21024576	53157376	107850176
77	456533	5545233	21253933	53582633	108531333
78	474552	5639752	21484952	54010152	109215352
79	493039	6735339	21717639	54439939	109902239
80	512000	5832000	21952000	54872000	110592000
81	531441	5929741	22188041	55306341	111284641
82	551368	6028568	22425768	55742968	111980168
83	571787	6128487	22665187	56181887	112678587
84	592704	6229504	22906304	56623104	113379904
85	614125	6331625	23149125	57066625	114084125
86	636056	6434856	23393656	57512456	114791256
87	658503	6539203	23639903	57960603	115501303
88	681472	6644672	23887872	58411072	116214272
89	704969	6751269	24137569	58863869	116930169
90	729000	6859000	24389000	59319000	117649000
91	753571	6967871	24642171	59776461	118370771
92	778688	7077888	24897088	60236288	119095488
93	804357	7189057	25153757	60698457	119823157
94	830584	7301384	25412184	61162984	120553784
95	857375	7414875	25672375	61629875	121287375
96	884736	7529536	25934336	62099136	122023936
97	912673	7645373	26198073	62570773	122763473
98	941192	7762392	26463592	63044792	123505992
99	970299	7880599	26730899	63521199	124251499

N	500³	600³	700³	800³	900³
0	125000000	216000000	343000000	512000000	729000000
1	125751501	217081801	344472101	513922401	731432701
2	126506008	218167208	345948408	515849608	733870808
3	127263527	219256227	347428927	517781627	736314327
4	128024064	220348864	348913664	519718464	738763264
5	128787625	221445125	350402625	521660125	741217625
6	129554216	222545016	351895816	523606616	743677416
7	130323843	223648543	353393243	525557943	746142643
8	131096512	224755712	354894912	527514112	748613312
9	131872229	225866529	356400829	529475129	751089429
10	132651000	226981000	357911000	531441000	753571000
11	133432831	228099131	359425431	533411731	756058031
12	134217728	229220928	360944128	535387328	758550528
13	135005697	230346397	362467097	537367797	761048497
14	135796744	231475544	363994344	539353144	763551944
15	136590875	232608375	365525875	541343375	766060875
16	137388096	233744896	367061696	543338496	768575296
17	138188413	234885113	368601813	545338513	771095213
18	138991832	236029032	370146232	547343432	773620632
19	139798359	237176659	371694959	549353259	776151559
20	140608000	238328000	373248000	551368000	778688000
21	141420761	239483061	374805361	553387661	781229961
22	142236648	240641848	376367048	555412248	783777448
23	143055667	241804367	377933067	557441767	786330467
24	143877824	242970624	479503424	559476224	788889024
25	144703125	244140625	381078125	561515625	791453125
26	145531576	245314376	382657176	563559976	794022776
27	146363183	246491883	384240583	565609283	796797983
28	147197952	247673152	385828352	567663552	799178752
29	148035889	248858189	387420489	569722789	801765089
30	148877000	250047000	389017000	571787000	804357000
31	149721291	251239591	390617891	573856191	806954491
32	150568768	252435968	392223168	575930368	809557568
33	151419437	253636137	393832837	578009537	812166237
34	152273304	254840104	395446904	580093704	814780504
35	153130375	256047875	397065375	582182875	817400375
36	153990656	257259456	398688256	584277056	820025856
37	154854153	258474853	400315553	586376253	822656953
38	155720872	259694072	401947272	588480472	825292672
39	156590819	260917119	403583419	590589719	827936019
40	157464000	262144000	405224000	592704000	830584000
41	158340421	263374721	406869021	594823321	833237621
42	159220088	264609288	408518488	596947688	835896888
43	160103007	265847707	410172407	599077107	838561807
44	160989184	267089984	411830784	601211584	841232384
45	161878625	268336125	413493625	603351125	843908625
46	162771336	269586136	415160936	605495736	846590536
47	163667323	270840023	416832723	607645423	849278123
48	164566592	272097792	418508992	609800192	851971392
49	165469149	273359449	420189749	611960049	854670349

N³	500³	600³	700³	800³	900³
50	166375000	274625000	421875000	614125000	857375000
51	167284151	275894451	423564751	616295051	860085351
52	168196608	277167808	425259008	618470208	862801408
53	169112377	278445077	426957777	620650477	865523177
54	170031464	279726264	428661064	622835864	868250664
55	170953875	281011375	430368875	625026375	870983875
56	171879616	282300416	432081216	627222016	873722816
57	172808693	283593393	433798093	629422793	876467493
58	173741112	284890312	435519512	631628712	879217912
59	174676879	286191179	437245479	633839779	881974079
60	175616000	287496000	438976000	636056000	884736000
61	176558481	288804781	440711081	638277381	887503681
62	177504328	290117528	442450728	640503928	890277128
63	178453547	291434247	444194947	642735647	893056347
64	179406144	292754944	445943744	644972544	895841344
65	180362125	294079625	447697125	647214625	898632125
66	181321496	295408296	449455096	649461896	901428696
67	182284263	296740963	451217663	651714363	904231063
68	183250432	298077632	452984832	653972032	907039232
69	184220009	299418309	454756609	656234909	909853209
70	185193000	300763000	456533000	658503000	912673000
71	186169411	302111711	458314011	660776311	915498611
72	187149248	303464448	460099648	663054848	918330048
73	188132517	304821217	461889917	665338617	921167317
74	189119224	306182024	463684824	667627624	924010424
75	190109375	307546875	465484375	669921875	926859375
76	191102976	308915776	467288576	672221376	926714176
77	192100033	310288733	469097433	674526133	932574833
78	193100552	311665752	470910952	676836152	935441352
79	194104539	313046839	472729139	679151439	938313739
80	195112000	314432000	474552000	681472000	941192000
81	196122941	315821241	476379541	683797841	944076141
82	197137368	317214568	478211768	686128968	946966168
83	198155287	318611987	480048687	688465387	949862087
84	199176704	320013504	481890304	690807104	952763904
85	200201625	321419125	483736625	693154125	955671625
86	201230056	322828856	485587656	695506456	958585256
87	202262003	324242703	487443403	697864103	961504803
88	203297472	325660672	489303872	700227072	964430272
89	204336469	327082769	491169069	702595369	967361669
90	205379000	328509000	493039000	704969000	970299000
91	206425071	329939371	494913671	707347971	973242271
92	207474688	331373888	496793088	709732288	976191488
93	208527857	332812557	498677257	712121957	979146657
94	209584584	334255384	500566184	714516984	982107784
95	210644875	335702375	502459875	716917375	985074875
96	211708736	337153536	504358336	719323136	988047936
97	212776173	338608873	506261573	721734273	991026973
98	213847192	340068392	508169592	724150792	994011992
99	214921799	341532099	510082399	726572699	997002999

Tafel
der
gemeinen Logarithmen
von 1 bis 1000.

N.	Log.	N.	Log.	N	Log.	N.	Log.
0	inf. neg.	50	1,6989700	100	2,0000000	150	2,1760913
1	0,0000000	51	1,7075702	101	43214	151	89769
2	0,3010300	52	1,7160033	102	86002	152	2,1818436
3	0,4771213	53	1,7242759	103	2,0128372	153	46914
4	0,6020600	54	1,7323938	104	70333	154	75207
5	0,6989700	55	1,7403627	105	2,0211893	155	2,1903317
6	0,7781513	56	1,7481880	106	53059	156	31246
7	0,8450980	57	1,7558749	107	93838	157	58997
8	0,9030900	58	1,7634280	108	2,0334238	158	86571
9	0,9542425	59	1,7708520	109	74265	159	2,2013971
10	1,0000000	60	1,7781513	110	2,0413927	160	41200
11	1,0413927	61	1,7853298	111	53230	161	68259
12	1,0791812	62	1,7923917	112	92180	162	95150
13	1,1139434	63	1,7993405	113	2,0530784	163	2,2121876
14	1,1461280	64	1,8061800	114	69049	164	48438
15	1,1760913	65	1,8129134	115	2,0606978	165	74839
16	1,2041200	66	1,8195439	116	44580	166	2,2201081
17	1,2304489	67	1,8260748	117	81859	167	27165
18	1,2552725	68	1,8325089	118	2,0718820	168	53093
19	1,2787536	69	1,8388491	119	55470	169	78867
20	1,3010300	70	1,8450980	120	91812	170	2,2304489
21	1,3222193	71	1,8512583	121	2,0827854	171	29961
22	1,3424227	72	1,8573325	122	63598	172	55284
23	1,3617278	73	1,8633229	123	99051	173	80461
24	1,3802112	74	1,8692317	124	2,0934217	174	2,2405492
25	1,3979400	75	1,8750613	125	69100	175	30380
26	1,4149733	76	1,8808136	126	2,1003705	176	55127
27	1,4313638	77	1,8864907	127	38037	177	79733
28	1,4471580	78	1,8920946	128	72100	178	2,2504200
29	1,4623980	79	1,8976271	129	2,1105897	179	28530
30	1,4771213	80	1,9030900	130	39434	180	52725
31	1,4913617	81	1,9084850	131	72713	181	76786
32	1,5051500	82	1,9138139	132	2,1205739	182	2,2600714
33	1,5185139	83	1,9190781	133	38516	183	24511
34	1,5314789	84	1,9242793	134	71048	184	48178
35	1,5440680	85	1,9294189	135	2,1303338	185	71717
36	1,5563025	86	1,9344985	136	35389	186	95129
37	1,5682017	87	1,9395193	137	67206	187	2,2718416
38	1,5797836	88	1,9444827	138	98791	188	41578
39	1,5910646	89	1,9493900	139	2,1430148	189	64618
40	1,6020600	90	1,9542425	140	61280	190	87536
41	1,6127839	91	1,9590414	141	92191	191	2,2810334
42	1,6232493	92	1,9637878	142	2,1522883	192	33012
43	1,6334685	93	1,9684829	143	53360	193	55573
44	1,6434527	94	1,9731279	144	83625	194	78017
45	1,6532125	95	1,9777236	145	2,1613680	195	2,2900346
46	1,6627578	96	1,9822712	146	43529	196	22561
47	1,6720979	97	1,9867717	147	73173	197	44662
48	1,6812412	98	1,9912261	148	2,1702617	198	66652
49	1,6901961	99	1,9956352	149	31863	199	88531

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
200	2,3010300	250	2,3979400	300	2,4771213	350	2,5440680
201	31961	251	96737	301	85665	351	53071
202	53514	252	2,0914005	302	2,4800069	352	65427
203	74960	253	31205	303	14426	353	77747
204	96302	254	48337	304	28736	354	90033
205	2,3117539	255	65402	305	42998	355	2,5502284
206	38672	256	82400	306	57214	356	14500
207	59703	257	99331	307	71384	357	26682
208	80633	258	2,4116197	308	85507	358	38830
209	2,3201463	259	32998	309	99585	359	50944
210	22193	260	49733	310	2,4913617	360	63025
211	42825	261	66405	311	27604	361	75072
212	63359	262	83013	312	41546	362	87086
213	83796	263	99557	313	55443	363	99066
214	2,3304138	264	2,4216039	314	69296	364	2,5611014
215	24385	265	32459	315	83106	365	22929
216	44538	266	48816	316	96871	366	34811
217	64597	267	65113	317	2,5010593	367	46661
218	84565	268	81348	318	24271	368	58478
219	2,3404441	269	97523	319	37907	369	70264
220	24227	270	2,4313638	320	51500	370	82017
221	43923	271	29693	321	65050	371	93739
222	63530	272	45689	322	78559	372	2,5705429
223	83049	273	61626	323	92025	373	17088
224	2,3502480	274	77506	324	2,5105450	374	28716
225	21825	275	93327	325	18834	375	40313
226	41084	276	2,4409091	326	32176	376	51878
227	60259	277	24798	327	45478	377	63414
228	79348	278	40448	328	58738	378	74918
229	98355	279	56042	329	71959	379	86392
230	2,3617278	280	71580	330	85139	380	97836
231	36120	281	87063	331	98280	381	2,5809240
232	54880	282	2,4502491	332	2,5211381	382	20634
233	73559	283	17864	333	24442	383	31988
234	92159	284	33283	334	37465	384	43312
235	2,3710679	285	48449	335	50448	385	54607
236	29120	286	63660	336	63393	386	65873
237	47483	287	78819	337	76299	387	77110
238	65770	288	93925	338	89167	388	88317
239	83979	289	2,4608978	339	2,5301997	389	99496
240	2,3802112	290	23980	340	14789	390	2,5910646
241	20170	291	38930	341	27544	391	21768
242	38154	292	53829	342	40261	392	32861
243	56063	293	68676	343	52941	393	43926
244	73898	294	83473	344	65584	394	54962
245	91661	295	98220	345	78191	395	65971
246	2,3909351	296	2,4712917	346	90761	396	76952
247	26970	297	27564	347	2,5403295	397	87905
248	44517.	298	42163	348	15792	398	98831
249	61993	299	56712	349	28254	399	2,6000739

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
400	2,6020600	450	2,6532125	500	2,6989700	550	2,7403627
401	31444	451	41765	501	98377	551	11516
402	42261	452	51384	502	1,7007037	552	19391
403	53050	453	60982	503	15680	553	27251
404	63814	454	70559	504	24305	554	35098
405	74550	455	80114	505	32914	555	42930
406	85260	456	89648	506	41505	556	50748
407	95944	457	99162	507	50080	557	58552
408	2,6106602	458	2,6608655	508	58637	558	66342
409	17233	459	18127	509	67178	559	74118
410	17839	460	27578	510	75702	560	81880
411	38418	461	37009	511	84209	561	89629
412	48972	462	46420	512	92700	562	97363
413	59501	463	55810	513	2,7101174	563	2,7505084
414	70003	464	65180	514	09631	564	12791
415	80481	465	74530	515	18072	565	20484
416	90933	466	83859	516	26497	566	28164
417	2,6201361	467	93169	517	34905	567	35831
418	11763	468	2,6702459	518	43298	568	43483
419	22140	469	11728	519	51674	569	51123
420	32493	470	20979	520	60033	570	58749
421	42821	471	30209	521	68377	571	66361
422	53125	472	39420	522	76705	572	73960
423	63404	473	48611	523	85017	573	81546
424	73659	474	57783	524	93313	574	89119
425	83889	475	66936	525	2,7201593	575	96678
426	94096	476	76070	526	09857	576	2,7604225
427	2,6304279	477	85184	527	18106	577	11758
428	14438	478	94279	528	26339	578	19278
429	24573	479	2,6803355	529	34557	579	26786
430	34685	480	12412	530	42759	580	34280
431	44773	481	21451	531	50945	581	41761
432	54837	482	30470	532	59116	582	49230
433	64879	483	39471	533	67272	583	56686
434	74897	484	48454	534	75413	584	64128
435	84893	485	57417	535	83538	585	71559
436	94865	486	66363	536	91648	586	78976
437	2,6404814	487	75290	537	99743	587	86381
438	14741	488	84198	538	2,7307823	588	93773
439	24645	489	93089	539	15888	589	2,7701153
440	34527	490	2,6901961	540	23938	590	08520
441	44286	491	10815	541	31973	591	15875
442	54223	492	19651	542	39993	592	23217
443	64037	493	28469	543	47998	593	30547
444	73830	494	37269	544	55989	594	37864
445	83600	495	46052	545	63965	595	45170
446	93349	496	54817	546	71926	596	52463
447	2,6503075	497	63564	547	79873	597	59743
448	12780	498	72293	548	87806	598	67012
449	22463	499	81005	549	95723	599	74268

N.	Log.	N	Log.	N.	Log.	N.	Log.
600	2 7781513	650	2, 8129134	700	2, 8450980	750	2, 8750613
601	88745	651	35810	701	57180	751	56399
602	95965	652	42476	702	63371	752	62178
603	2, 7803173	653	49132	703	69553	753	67950
604	10369	654	55777	704	75727	754	73713
605	17554	655	62413	705	81891	755	79470
606	24726	656	69038	706	88047	756	85218
607	31887	657	75654	707	94194	557	90959
608	39036	658	82259	708	2, 8500333	758	96692
609	46173	659	88854	709	06462	759	2, 8802418
610	53298	660	95439	710	12583	760	08136
611	60412	661	2, 8202015	711	18696	761	13847
612	67514	662	08580	712	24800	762	19550
613	74605	663	15135	713	30895	763	25245
614	81684	664	21681	714	36982	764	30934
615	88751	665	28216	715	43060	765	36614
616	95807	666	34742	716	49130	766	42288
617	2, 7902852	667	41258	717	55192	767	47954
618	09885	668	47765	718	61244	768	53612
619	16906	669	54261	719	67289	769	59263
620	23917	670	60748	720	73325	770	64907
621	30916	671	67225	721	79353	771	70544
622	37904	672	73693	722	85372	772	76173
623	44880	673	80151	723	91383	773	81795
624	51846	674	86599	724	97386	774	87410
625	58800	675	93038	725	2, 8603380	775	93017
626	65743	676	99467	726	09366	776	98617
627	72675	677	2, 8305887	727	15344	777	2, 8904210
628	79596	678	12297	728	21314	778	09796
629	86506	679	18698	729	27275	779	15375
630	93405	680	25089	730	33229	780	20946
631	2, 8000294	681	31471	731	39174	781	26510
632	07171	682	37844	732	45111	782	32068
633	14037	683	44206	733	51040	783	37618
634	20893	684	50561	734	56961	784	43161
635	27737	685	56906	735	62873	785	48697
636	34571	686	63241	736	68778	786	54225
637	41394	687	69564	737	74675	787	59747
638	48207	688	75887	738	80564	788	65262
639	55009	689	82192	739	86444	789	70770
940	61800	690	88491	740	92317	790	76271
641	68580	691	94780	741	98182	791	81765
642	75350	692	2, 8401061	742	2, 8704039	792	87252
643	82110	693	07332	743	09888	793	92732
644	88859	694	13595	744	15729	794	98205
645	95597	695	19848	745	21563	795	2, 9003671
646	2, 8102325	696	26092	746	27388	796	09131
647	09043	697	32328	747	33206	797	14583
648	15750	698	38554	748	39016	798	20029
649	22447	699	44772	749	44818	799	25468

N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.	N.	Log.
800	2,9030900	850	2,9294189	900	2,9542425	950	2,977723
801	36325	851	99296	901	47248	951	8180
802	41744	852	2,9304396	902	52065	952	8636
803	47155	853	09490	903	56878	953	9092
804	52560	854	14579	904	61684	954	9548
805	57959	855	19661	905	66486	955	2,980003
806	63350	856	24738	906	71282	956	0457
807	68735	857	29808	907	76073	957	0911
808	74114	858	34873	908	80858	958	1365
809	79485	859	39932	909	85639	959	1818
810	84850	860	44985	910	90414	960	2271
811	90209	861	50032	911	95184	961	2723
812	95560	862	55073	912	99948	962	3175
813	2,9100905	863	60108	913	2,9604708	963	3626
814	06244	864	65137	914	09462	964	4077
815	11576	865	70161	915	14211	965	4527
816	16902	866	75179	916	18955	966	4977
817	22221	867	80191	917	23693	967	5426
818	27533	868	85197	918	28427	968	5875
819	32839	869	90198	919	33155	969	6323
820	38139	870	95193	920	37878	970	6771
821	43432	871	2,9400182	921	42596	971	7219
822	48718	872	05165	922	47309	972	7666
823	53998	873	10142	923	52017	973	8112
824	59272	874	15114	924	56720	974	8559
825	64539	875	20081	925	61417	975	9004
826	69800	876	25041	926	66110	976	9449
827	75055	877	29996	927	70797	977	9894
828	80303	878	34945	928	75480	978	2,9903389
829	85545	879	39889	929	80157	979	0782
830	90781	880	44827	930	84826	980	1226
831	96010	881	49759	931	89497	981	1669
832	2,9201233	882	54686	932	94159	982	2111
833	06450	883	59607	933	98816	983	2553
834	11661	884	64523	934	2,9703469	984	2995
835	10865	885	69433	935	08116	985	3436
836	22063	886	74337	936	12758	986	3876
837	27255	887	79236	937	17396	987	4317
838	32440	888	84130	938	22028	988	4756
839	37620	889	89018	939	26656	989	5196
840	42793	890	93900	940	31279	990	5635
841	47960	891	98777	941	35896	991	6073
842	53121	892	2,9503649	942	40509	992	6511
843	58276	893	08515	943	45117	993	6949
844	63424	894	13375	944	49720	994	7386
845	68567	895	18230	945	54318	995	7823
846	73704	896	23080	946	58911	996	8259
847	78834	897	27924	947	63500	997	8695
848	83959	898	32763	948	68083	998	9130
849	89077	899	37597	949	72662	999	9565

Verbesserungen.

Seite 33 Zeile 1 streiche aus: erste Produkt, dergestalt, daß die
" — " 6 lies multiplicirende
" 36 " 3 v. u. l. zehntheiligen Ziffern
" 37 l. Product, 1306,499
" 38 statt 113760315 l. 113769455
" — st. 910112 lies 91012
" — st. 128882060 l. 128882069
" 41 " 6 v. u. l. Divisor.
" 51 l. 812 $\frac{200}{932}$ Quotient
" 55 " 9 v. u. st. dieser l. dem Divisor
" 57 st. 3660 l. 3666; unter den successiven Resten ist die eine 9 überflüssig.
" 58 " 5 v. u. l. $6\frac{1}{2}$ st. $16\frac{1}{2}$
" 62 " 6 v. u. l. den statt der
" — " 4 l. werden st. wird
" 63 " 8 l. in 200 jeder dieser Theile 2mal, in 300
" 80 " 4 v. u. l. $\frac{504}{1409}$
" 86 " 14 v. u. l. Multiplicandus
" 90 st. § 101. l. § 105.
" — § 105. Z. 5 l. 4 dem.
" — " 3 v. u. l. 4 den
" 94 " 16 l. $\frac{1}{12}$ st. $\frac{5}{12}$
" 95 " 12 l. $\frac{100000}{314159}$
" — " 4 v. u. l. $7 + \frac{787}{14159}$
" 96 " 8 v. u. l. $3 + \frac{157}{677}$
" 98 " 15 l. $\frac{189}{301}$
" — " 30 l. $\frac{425}{1754}, \frac{1887}{7763}, \frac{4157}{17280}$ st. $\frac{787}{3048}, \frac{1755}{6843}$
" — " 32 l. 17280, 4187 st. 6843, 1755
" 100 " 5 l. $\frac{69}{154}$
" 101 " 15 l. $193\frac{5}{8}$
" 102 " 1 st. $\frac{3}{4}$ l. $\frac{1}{4}$, st. 1,935 l. 1,435
" — " 3 l. $50\frac{3}{4} + 26\frac{5}{7}$
" 103 " 6 v. u. l. 80,625 st. 80,525
" — " 5 st. $\frac{75}{1000}$ l. $\frac{75}{100}$

S. 105 Z. 5 v. u. l. $\frac{57}{4}$. $\frac{9}{79}$ st. ^{63} . γ^2
" 108 " 5 l. 69 W. 6 S. 7 M.
" 108 " 6 l. 23 st. 27 u. hier überall l. 69 st. 81 und 7 st. 11
" — " 4 v. u. l. 1 Tamb
" 109 " 9 l. verschiedenen
" — " 21 l. 3 st.
" 111 " 3 v. u l. $\frac{1299}{24}$
" 114 " 11 l. 720 st. 20
" 115 " 17 lies $13\frac{157}{375}$
" 116 " 7 l. $\frac{8}{375}$, Zeile 11 l. $13\frac{157}{375}$
" — " 5 v. u. l. 6 st. 5
" — " 1 v. u. l. $\frac{7}{9}$ st. $\frac{5}{9}$
" 117 " 3 l. 6 Pf.
" — " 11 v. u. l. $3\frac{7}{10}$.
" — " 6 v. u. l. 9 st. 8.
" 118 " 8 §. 117 l. 12 gr.
" 119 " 18 u. 19 l. $1\frac{1}{2}$ st. $9\frac{1}{2}$.
" — " 28 l. 2 Pf. u. $1\frac{1}{2}$.
" 124 " 1 §. 122. l. complexen.
" 125 " 16 l. 1016 st. 1616.
" 138 " 15 l. 100mal.
" 139 " 14 l. 4|27|79|00.
" 148 " 5 l. dreyfaches Produkt von dem Quadrate.
" 150 " 18 l. dreyfache.
" 151 " 4 l. 842.
" 153 " 11 l. 2160 st. 2162.
" 155 " 8 §. 150 l. $\frac{147}{343}$.
" " 9 lies $\frac{\sqrt[3]{147}}{7}$ st. $\frac{147}{7}$
" 156 9 v. u. l. 6,540000000.
" 157 2 l. $\sqrt[25]{25}$ st. $\sqrt[25]{}$
" — " 16 l. dreyfache Quadrat.
" 158 " 2 l. 8100 st. 1800.
" — " 5 l. 0,00001 st. 0,000001.
" — " 15 l. $\frac{126^2}{312^2}$
die 19te Zeile streiche man aus.
" — " 20 l. $5\frac{1}{8}^2$. vorletzte Zeile l. $0{,}6^3$ st. 0,6.
" 159 " 3 l. im Zähler 614125.
" — " 5 l. $\sqrt[3]{\frac{1}{1}\frac{3}{7}\frac{3}{2}\frac{1}{8}}$.
" — " 7 l. $\sqrt[3]{}$ 0,064.
" 161 §. 158 Z. 4. l. 12 : 3.
" 162 — 161 — 5 l. eines $3\frac{2}{3}$ Fuß und das.
" 163 Z. 15 l. Verhältniß.
" 174 — 4 l. zweyte.

S. 180 Z. 7 l. 268 Ruthen.
" 182 — 8 l. zweyte, Z. 5 v. u. l. 30.
" 185 §. 186. Z. 4. l. Art ist.
" 191 Z. 8 v. u. l. 7. 4.
" 192 — 2 u. 3 l. der doppelten Summe, Z. 16 lies 16 st. 15.
" 193 " 7 v. u. l. $\frac{2158}{6}$
" 198 " 9 l. $\frac{3}{2}$ st. $\frac{2}{3}$, Z. 10 l. 12 st. 32.
" 201 " 4 l. $\frac{3}{2}$ st. $\frac{2}{3}$, Z. 8 l. 8000, Z. 18 l. 3 st. 2.
" 202 " 13 l. wir.
" 203 " 13 l. 1 st. 14, Z. 26 l. wir.
" 204 " .. l. 8. st. 8. 100 und st. 2. 1000 l. 2.
" 208 " 21 l. 12050 st. 120, und setze hinzu: die erste erhält $1971\frac{2}{11}$ Rthlr., die zweyte $2190\frac{10}{11}$ Rthlr. die dritte $7887\frac{3}{11}$ Rthlr.
" 209 " letzte l. im st. ein.
" 210 " 4 v. u. l. 10800 st. 10500.
" 211 " 12 v. u. l. 20 st. 24.
" 212 " 13 v. u. l. 2640, und Zeile 12 v. u. l. 792.
" 215 " 6, 12, und 14 l. 100000, Z. 15 l. 112500, und statt 4 l. 40, Z. l. 40 + 45 + 72, und über: all lies 157 st. 121, die Resultate sind folgende: 1) $382\frac{26}{115}$ Rthlr. 2) $429\frac{47}{115}$ Rthl. 3) $687\frac{14}{115}$ Rthlr.
" 217 " 10 l. $2\frac{1}{3}$. 15.
" 219 " 6 v. u. l. 1 st. 4.
" 226 " 10 v. u. l. $3\frac{4}{7}$.
" 230 " 12 l. $21\frac{1}{4}$.
" 231 " 8 v. u. l. Silber, ferner 4 Mark 14 Loth und 6 Mark 10 Loth.
" 237 " 1 l. Frage, Z. 14. l. innen.
" 238 " 8 v. u. l. 8 st. 9.
" 241 " 9 l. um st. aus.
" 248 " 7 v. u. l. $3\frac{1}{5}$ Rthlr.
" 152 l. Seite 252, und Zeile 13 l. haben.
" 253 " 10 v. u. l. b st. 6. Z. 5 v. u. l. c st. C.
" 254 " 16 l. 23 st. 28.
" 255 " 5 l. noch.
" 356 " v. u. l. den, letzte Zeile l. Factoren.
" 265 " 16 u. 17, l. er ist ein, st. daß der, Z. 19 streiche ist weg.
" 266 " 9 streiche $7\frac{8}{9}$ einmal weg.
" 267 " 4 l. $3\frac{3}{4}$.
" 268 " 6 v. u. l. der st. die.
" 270 " letzte Zeile l. wer also das erste Glied und die Diff. hat.
" 271 " 3 l. andern, Z. 4 l. Gesetz.
" 275 " 7 l. doppelte.
" 282 " 15 l. folgendem.
" 284 l. S. 285.
" 287 " 17. l. Anfängern.

Von Seite 288 ist die Seitenzahl zu verbessern.

Bayerische Staatsbibliothek München

S. 288 Z. 8 l. einem.
" 290 " 3 v. u. l. das st. dem.
" 291 " letzte Zeile l. multipliciret.
" 293 " 3 l. die st. der, §. 218 l. demselben.
" 295 " 18 l. beliebigen.
" 296 " 12 l. 3^3 st. 3^2.
" 297 " 13 l. $4000 \cdot \frac{21^4}{20^4} = 4000 \cdot \frac{21^2}{20^2} \cdot \frac{21^2}{20^2}$.
" 297 " l. $1\frac{9448}{400}$.
" 298 " 7. v. u. l. Nahme 3.
" 299 §. 222 Z. 9 l. gieb das. Z. 13 l. sind, dividire.
" 301 " 4 l. 64 st. 46, Z. 18 l. $\frac{125}{64}$.
" 319 §. 235 Z. 7 l. correspondirende.
" 329 " 5 v. u. l. 100 st. 10.
" 330 " 8 l. 47000.
" 342 " 17 l. 0,05296802600.
" 343 " 4 v. u. l. 547.
" 374. Nach dem Gesetz von 1795 ist die Münz-Einheit eine Silbermünze von 5 Grammen an Gewicht, welche $\frac{9}{10}$ Silber und $\frac{1}{10}$ Zusatz enthält; sie heißt Franc und ihre Unterabtheilungen sind Decimen und Centimen.

Wegen Mangel an Zeit konnte in diesem ersten Theile nur die Vergleichung der Münzen gegeben werden; im zweyten Theile wird das Fehlende erfolgen.

Berlin,

gedruckt bey Joh. Wilh. Schmidt, in der Scharrnstraße.

Bayerische Staatsbibliothek München

BSB Bayerische StaatsBibliothek
MDZ Münchener DigitalisierungsZentrum Digitale Bibliothek

Grüson, Johann Philipp,

Vollständige Anleitung zur niedern, höhern und angewandten Mathematik in so fern solche sowohl dem Officier überhaupt, als auch dem Ingenieur, Artilleristen und Seemann unentbehrlich ist
Bd.: 1

Berlin 1799

Don.Lud. 556-1
urn:nbn:de:bvb:12-bsb11021692-3
VD18 14665743-001